

# Psychologische Testtheorie

## Sitzung 3

### Testtheoretische Modelle I



We are happy to share our materials openly:

The content of these [Open Educational Resources](#) by [Lehrstuhl für Psychologische Methodenlehre und Diagnostik, Ludwig-Maximilians-Universität München](#) is licensed under [CC BY-SA 4.0](#). The CC Attribution-ShareAlike 4.0 International license means that you can reuse or transform the content of our materials for any purpose as long as you cite our original materials and share your derivatives under the same license.

1. Die Antwort einer zufällig aus der Population gezogenen Person auf einem Item  $i$  eines psychologischen Tests beschreiben wir durch die Zufallsvariable  $X_{iPerson}$ .
2. Der Erwartungswert  $E(X_{iPerson})$  wird auch wahrer Wert der Person auf Item  $i$  genannt und mit  $\tau_{iPerson}$  bezeichnet.
3. Das durch die Zufallsvariable  $X_i$  beschriebene doppelte Zufallsexperiment setzt sich zusammen aus zwei Zufallsexperimenten, die wiederum durch die Zufallsvariablen  $\tau_{iPerson}$  und  $X_{iPerson}$  beschrieben werden.
4. Die Zufallsvariable  $\tau_i$  beschreibt den zufälligen wahren Wert, den eine aus der Population gezogene Person auf Item  $i$  hat.

Herr 1  $X_1$ : "Ich bin aktiv"  
 $\downarrow$   
 $X_1 = 3$   
 $\square_1 \square_2 \square_3 \square_4 \square_5$   
 ? Was steckt "dahinter"?

①

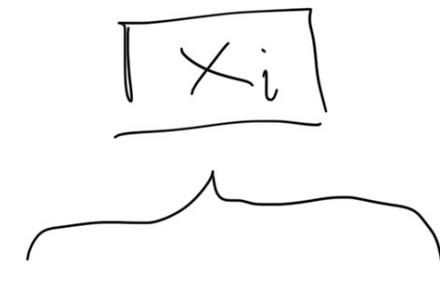


Ziehen einer Person aus  
der Population  
 $\hat{=}$  Zufallsexp. 1

②

"Ich bin aktiv"  
 $\square_1 \square_2 \square_3 \square_4 \square_5$

Person bearbeitet  
Herr 1  
 $\hat{=}$  Zufallsexp. 2



$E(X_{i, Person}) = \bar{u}_{i, Person}$



$x_i = 3$

1. Die Antwort einer zufällig aus der Population gezogenen Person auf einem Item  $i$  eines psychologischen Tests beschreiben wir durch die Zufallsvariable  $X_{iPerson}$ .
2. Der Erwartungswert  $E(X_{iPerson})$  wird auch wahrer Wert der Person auf Item  $i$  genannt und mit  $\tau_{iPerson}$  bezeichnet.
3. Das durch die Zufallsvariable  $X_i$  beschriebene doppelte Zufallsexperiment setzt sich zusammen aus zwei Zufallsexperimenten, die wiederum durch die Zufallsvariablen  $\tau_{iPerson}$  und  $X_{iPerson}$  beschrieben werden.
4. Die Zufallsvariable  $\tau_i$  beschreibt den zufälligen wahren Wert, den eine aus der Population gezogene Person auf Item  $i$  hat.
5. Neben dem zufälligen wahren Wert  $\tau_i$  verfügt jedes Item  $i$  laut dem zweiten Axiom der Testtheorie über eine Fehlervariable  $\varepsilon_i$ .
6. Falls sich der zufällige wahre Wert  $\tau_1$  in  $\tau_{1Person} = 1.4$  realisiert hat und die Person auf Item 1 den Wert 2 angekreuzt hat, dann hat sich die Fehlervariable  $\varepsilon_1$  im Wert 3.4 realisiert.

- **D1:** Für jedes Item  $i$  ist  $\tau_i$  die Zufallsvariable, deren Realisation der wahre Wert  $\tau_{iPerson}$  der Itemantwort der zufällig gezogenen Person ist
- **D2:** Für jedes Item  $i$  ist die Fehlervariable  $\varepsilon_i$  eine Zufallsvariable, die wie folgt definiert ist:  $\varepsilon_i = X_i - \tau_i$

- **E1:** Die Itemantwort einer zufällig gezogenen Person auf ein Item ist die Summe des zufälligen wahren Wertes und der Fehlervariable dieses Items:  $X_i = \tau_i + \varepsilon_i$
- **E2:** Der Erwartungswert der Fehlervariable eines Items ist 0:  $E(\varepsilon_i) = 0$
- **E3:** Der Erwartungswert eines Items entspricht dem Erwartungswert des zufälligen wahren Wertes auf diesem Item:  $E(X_i) = E(\tau_i)$
- **E4:** Die Kovarianz des zufälligen wahren Wertes eines Items mit der Fehlervariable dieses Items ist 0:  $COV(\tau_i, \varepsilon_i) = 0$
- **E5:** Die Kovarianz des zufälligen wahren Wertes eines Items mit der Fehlervariable eines beliebigen anderen Item ist 0:  $COV(\tau_i, \varepsilon_j) = 0$
- **E6:** Die Varianz eines Items i entspricht der Summe der Varianzen des zufälligen wahren Wertes und der Fehlervariable dieses Items:  $VAR(X_i) = VAR(\tau_i) + VAR(\varepsilon_i)$

Sitzung	Datum	Thema	Themenblock
1	14.10.24	Einführung	Begriffe, Modellierung von Antwortverhalten durch Zufallsvariablen & mathematische Grundlagen der Testtheorie
2	21.10.24	Wahrscheinlichkeitstheoret. Grundlagen	
3	28.10.24	Testtheoretische Modelle I	

➔ In der heutigen Vorlesung werden wir uns genauer damit beschäftigen, wie die zufälligen wahren Werte  $\tau_i$  der Items eines psychologischen Tests im Rahmen von testtheoretischen Modellen mit den uns eigentlich interessierenden latenten Variablen zusammenhängen

# 1. Latente Variablen

- Zur Erinnerung: Unter latenten Variablen verstehen wir nicht direkt beobachtbare Variablen (z.B. Intelligenz, Aufmerksamkeit, Extraversion)
- Um diese latenten Variablen durch einen psychologischen Test erfassen zu können, müssen wir sie mithilfe von mathematischen Gleichungen (also testtheoretischen Modellen) mit den manifesten Itemantworten des Tests in Beziehung setzen
- Zunächst müssen wir jedoch noch einige grundlegende Überlegungen anstellen...

# 1. Latente Variablen

## 1.1. Zufällige latente Variablen

## 1.2. Latente Variablen und wahre Werte

- In der letzten Vorlesung haben wir für die Items eines Tests den Unterschied zwischen dem wahren Wert  $\tau_{iPerson}$  einer festen Person und dem zufälligen wahren Wert  $\tau_i$  eingeführt
- Diese Unterscheidung werden wir jetzt auch in Bezug auf latente Variablen treffen
- Den Wert einer **festen Person** auf der latenten Variable bezeichnen wir mit  $\theta_{Person}$ . Dies ist der tatsächliche Wert der Person auf der latenten Variable.
  - Beispiel: Falls es sich bei der latenten Variable um Intelligenz handelt, bedeutet  $\theta_{Person} = 100$ , dass die feste Person eine Intelligenz von 100 aufweist
- Wenn die **Person zufällig gezogen** wird, muss sich der Wert  $\theta_{Person}$  im Zuge der Ziehung erst einmal realisieren (genau wie  $\tau_{iPerson}$ ). Wir wissen ja z.B. vor der Ziehung nicht, wie intelligent die gezogene Person sein wird.
- Die Zufallsvariable, die für diesen zufälligen Vorgang steht und deren Realisation  $\theta_{Person}$  ist, nennen wir **zufällige latente Variable  $\theta$**  (Theta)

- Da die zufällige latente Variable  $\theta$  eine Zufallsvariable ist, hat sie auch einen **Erwartungswert  $E(\theta)$**  und eine **Varianz  $VAR(\theta)$**
- Wir erinnern uns an die Interpretation des Erwartungswertes:  
Wenn man das der Zufallsvariable  $\theta$  zugrunde liegende Zufallsexperiment unendlich oft wiederholen würde und den Mittelwert aus allen Realisationen der Zufallsvariable berechnen würde, wäre dies der Erwartungswert
- Das heißt: Wenn wir unendlich viele Personen aus der Population ziehen würden (vereinfacht gesagt: die komplette Population) und bei jeder gezogenen Person den Wert auf der latenten Variable  $\theta_{Person}$  bestimmen würden (falls dies möglich wäre), dann wäre  $E(\theta)$  der Mittelwert dieser Werte

- Wir können also  $E(\theta)$  als Mittelwert der Werte auf der latenten Variable in der Population interpretieren
  - Beispiel: Falls es sich bei der latenten Variable um Intelligenz handelt, bedeutet  $E(\theta) = 100$ , dass die durchschnittliche Intelligenz in der Population 100 beträgt
- Analog ist dann  $VAR(\theta)$  die empirische Varianz der Werte auf der latenten Variable in der Population, also ein Maß dafür, wie stark sich die Personen in der Population in ihren Werten auf der latenten Variable unterscheiden
  - Beispiel: Falls es sich bei der latenten Variable um Intelligenz handelt, bedeutet  $VAR(\theta) = 225$ , dass die empirische Varianz der Intelligenz in der Population 225 beträgt

# 1. Latente Variablen

## 1.1. Zufällige latente Variablen

## **1.2. Latente Variablen und wahre Werte**

- Aus der letzten Vorlesung wissen wir, dass wir die Antworten einer festen Person auf ein Item  $i$  als Zufallsvariable  $X_{iPerson}$  auffassen können
- Diese Zufallsvariable besitzt für jede Person einen Erwartungswert  $E(X_{iPerson}) = \tau_{iPerson}$ , den wahren Wert der festen Person
- Zudem besitzt sie eine Varianz  $VAR(X_{iPerson})$ , da die Person je nach Kontext, Stimmung, etc. in ihrer Itemantwort variiert

- Wie können wir nun die Itemantworten  $X_{iPerson}$  mit dem Wert auf der latenten Variable  $\theta_{Person}$  in Beziehung setzen?
- Wenn wir annehmen, dass die Varianz in der Itemantwort nur durch zufällige Einflüsse wie Kontext, Stimmung etc. zustande kommt, sollte die latente Variable nur einen Einfluss darauf haben, wie eine Person „im Durchschnitt“ auf das Item antwortet
- Das heißt: Die latente Variable sollte mit der Itemantwort nur über deren wahren Wert (also dem „durchschnittlichen“ Wert) zusammenhängen

- Formal: Für jedes Item  $i$  sollte es eine itemspezifische Gleichung geben, die jeweils den wahren Wert  $\tau_{iPerson}$  der Person auf diesem Item mit ihrem Wert  $\theta_{Person}$  auf der latenten Variablen in Beziehung setzt, z.B.:

$$\tau_{iPerson} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta_{Person}$$

- Wir werden Gleichungen dieser Form von jetzt an gleich auf der Ebene der zufälligen wahren Werte und zufälligen latenten Variablen formulieren.  
Das heißt für das obige Beispiel:

$$\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta$$

- Inhaltlich gesehen ändert dies nichts an der Beziehung zwischen Item und latenter Variable

- Wir erinnern uns nun an die erste Folgerung aus den Axiomen:

$$X_i = \tau_i + \varepsilon_i$$

- Wenn wir die zweite Gleichung der letzten Folie hier einsetzen, erhalten wir

$$X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i$$

- **Wir sind also bei einem testtheoretischen Modell angekommen!**
  - Es setzt latente Variablen und manifeste Itemantworten zueinander in Beziehung und enthält eine Fehlervariable (vgl. Vorlesung 1)
  - Da wir aber den „Umweg“ über die zufälligen wahren Werte gegangen sind, können wir alle Folgerungen aus den Axiomen verwenden, was sich als sehr praktisch herausstellen wird

## 2. Testtheoretische Modelle

- Wir werden nun verschiedene testtheoretische Modelle kennenlernen
- Diese unterscheiden sich in ihren Modellannahmen bezüglich
  - des **Zusammenhangs** der **zufälligen latenten Variable  $\theta$**  mit den **zufälligen wahren Werten  $\tau_i$**  der Items des Tests
  - der Eigenschaften der **Fehlervariablen  $\varepsilon_i$**
- **Diese Annahmen können – im Gegensatz zu den Axiomen und Folgerungen aus der letzten Vorlesung – falsch sein, d.h. nicht der Realität entsprechen!**
- Die Frage, welches Modell das „richtige“ für einen konkreten psychologischen Test ist, ist gleichbedeutend mit der Frage, für welches Modell alle Annahmen erfüllt sind
- Dies ist also eine empirische Frage, mit der wir uns später im Semester beschäftigen werden
- Sehr wichtig: **Aus theoretischer Sicht ist keines der Modelle per se „besser“ als das andere!**

## 2. Testtheoretische Modelle

### 2.1. Paralleles Modell

2.2. Essentiell Paralleles Modell

2.3.  $\tau$ -äquivalentes Modell

2.4. Essentiell  $\tau$ -äquivalentes Modell

2.5.  $\tau$ -kongenerisches Modell

2.6. Mehrdimensionales  $\tau$ -kongenerisches Modell

Im parallelen Modell werden folgende Annahmen getroffen:

$$\tau_i = \theta \text{ und somit } X_i = \theta + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

$$VAR(\varepsilon_i) = VAR(\varepsilon_j) \text{ für alle Itempaare } i, j$$

$$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ für alle Itempaare } i, j$$

- **Rückgriff 1** auf Ausgangsmodell:  $\tau_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta = 0 + 1 \cdot \theta = \theta$
- **Rückgriff 2** auf Ausgangsmodell:  $X_i = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta + \varepsilon_i = 0 + 1 \cdot \theta = \theta + \varepsilon_i$
- Die inhaltliche Bedeutung dieser Annahmen diskutieren wir auf den nachfolgenden Folien...

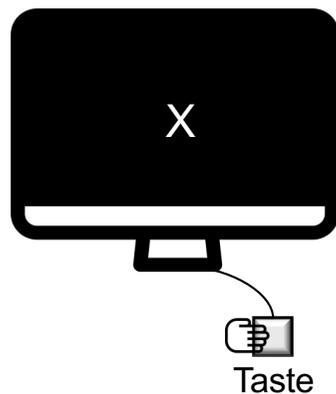
$$\tau_i = \theta \text{ und somit } X_i = \theta + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Die erste Annahme bezieht sich auf den Zusammenhang der zufälligen latenten Variable  $\theta$  mit den zufälligen wahren Werten  $\tau_i$  der Items des Tests
- In Worten: „Die zufällige latente Variable entspricht dem zufälligen wahren Wert auf jedem Item  $i$ “
- Auf Ebene einer festen Person heißt das:  $\tau_{iPerson} = \theta_{Person}$  für alle Items  $i$
- Das Modell nimmt also an, dass der wahre Wert auf jedem Item  $i$  identisch mit dem Wert auf der latenten Variable ist
- Da diese Gleichung für alle Items des Tests angenommen wird, muss im parallelen Modell wegen  $\tau_{iPerson} = \theta_{Person} = \tau_{jPerson}$  eine Person denselben wahren Wert auf allen Items haben!

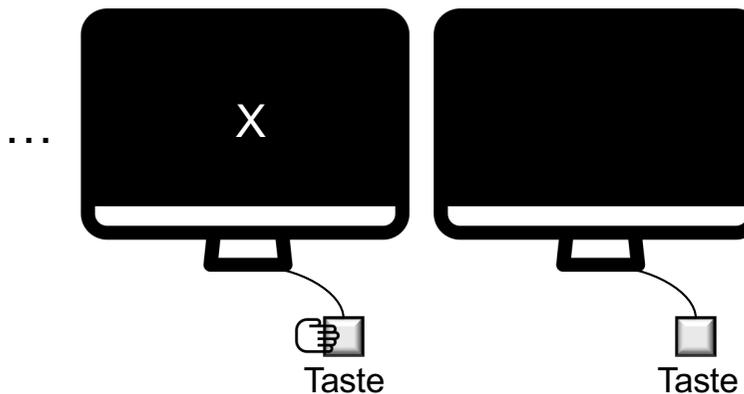
Beispiel zur Illustration der Annahmen:

- Reaktionszeit-Test mit drei Items der TAP:

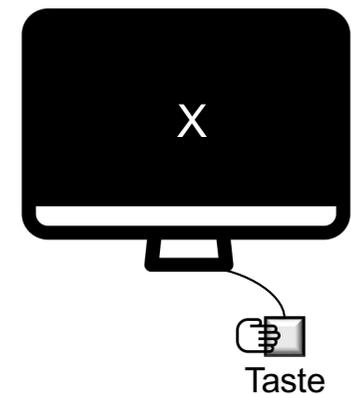
Item 1:



Item  $j$ :



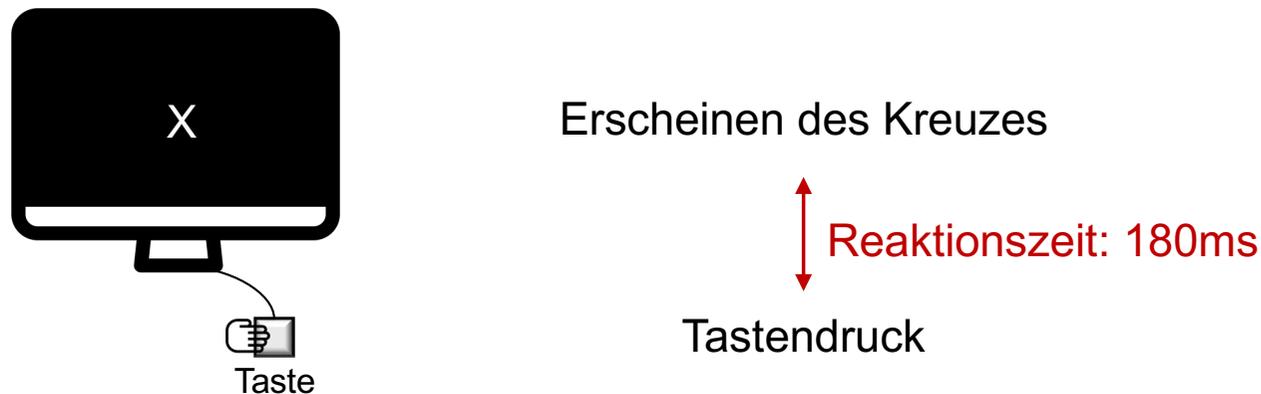
Item  $k$ :



- Die Testpersonen müssen jeweils auf einen Knopf drücken, wenn der Stimulus erscheint
- Die Zeit zwischen Erscheinen des Stimulus und Drücken des Knopfes entspricht jeweils der Itemantwort

Beispiel zur Illustration der Annahmen:

- Reaktionszeit-Test mit drei Items der TAP:



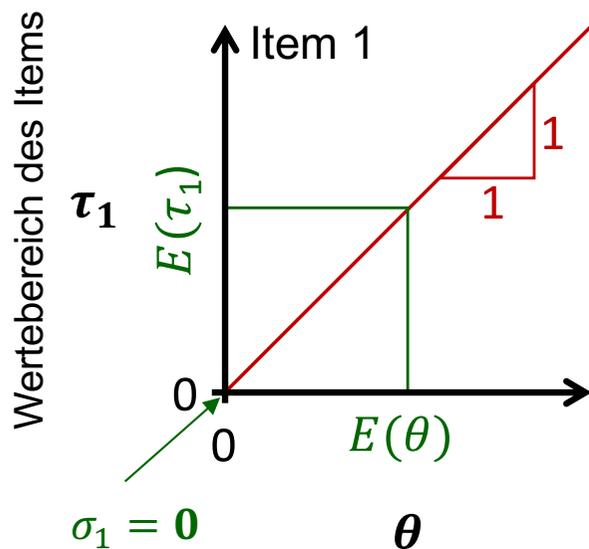
- Wenn also z.B. eine zufällig gezogene Person nach Erscheinen des ersten Stimulus (Kreuz) 180ms gebraucht hat, um auf den Knopf zu drücken, hat sich die Itemantwort  $X_1$  in dem Wert  $x_1 = 180$  realisiert
- Wir wollen mit diesem Test die latente Variable „Alertness“ erfassen

$$\tau_i = \theta \text{ und somit } X_i = \theta + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Bezogen auf unser Reaktionszeit-Beispiel:
  - Das Modell nimmt an, dass die durchschnittliche Reaktionszeit einer Person auf alle Items des Tests bei unendlicher Wiederholung des Tests exakt gleich ist und exakt ihrer Ausprägung auf der latenten Variable *Alertness* entspricht
  - Wenn z.B. der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit“) einer Person auf dem ersten Stimulus 180(ms) ist, dann muss der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit“) auf dem zweiten Stimulus auch 180(ms) betragen, und die Person hätte in diesem Fall einen Alertnesswert von 180
  - Wenn der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit“) einer anderen Person auf dem ersten Stimulus 200(ms) ist und auf dem zweiten Stimulus auch 200(ms), dann hätte die Person einen Alertnesswert von 200 (Person 2 hat einen höheren Alertnesswert als Person 1 → Person 2 ist im Mittel langsamer)

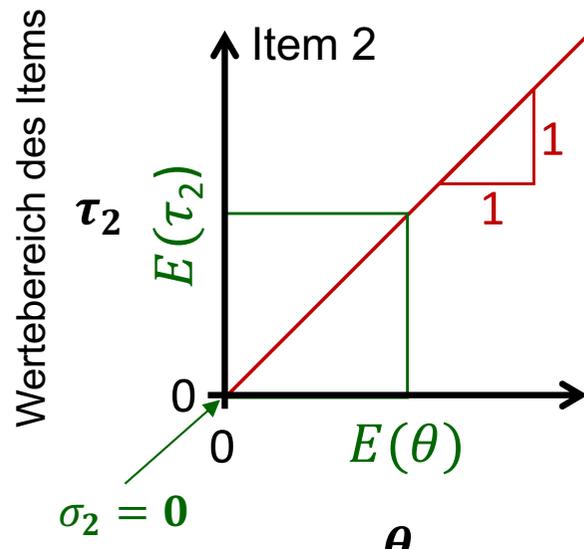
$$\tau_i = \theta \text{ und somit } X_i = \theta + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Grafische Veranschaulichung:



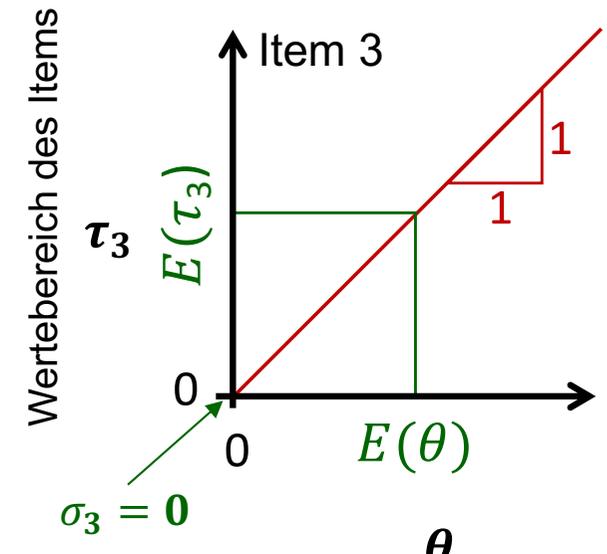
Wertebereich latente Variable

$$\tau_1 = 0 + 1 \cdot \theta = \theta$$



Wertebereich latente Variable

$$\tau_2 = 0 + 1 \cdot \theta = \theta$$



Wertebereich latente Variable

$$\tau_3 = 0 + 1 \cdot \theta = \theta$$

da  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$  und  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$VAR(\varepsilon_i) = VAR(\varepsilon_j) \text{ für alle Itempaare } i, j$$

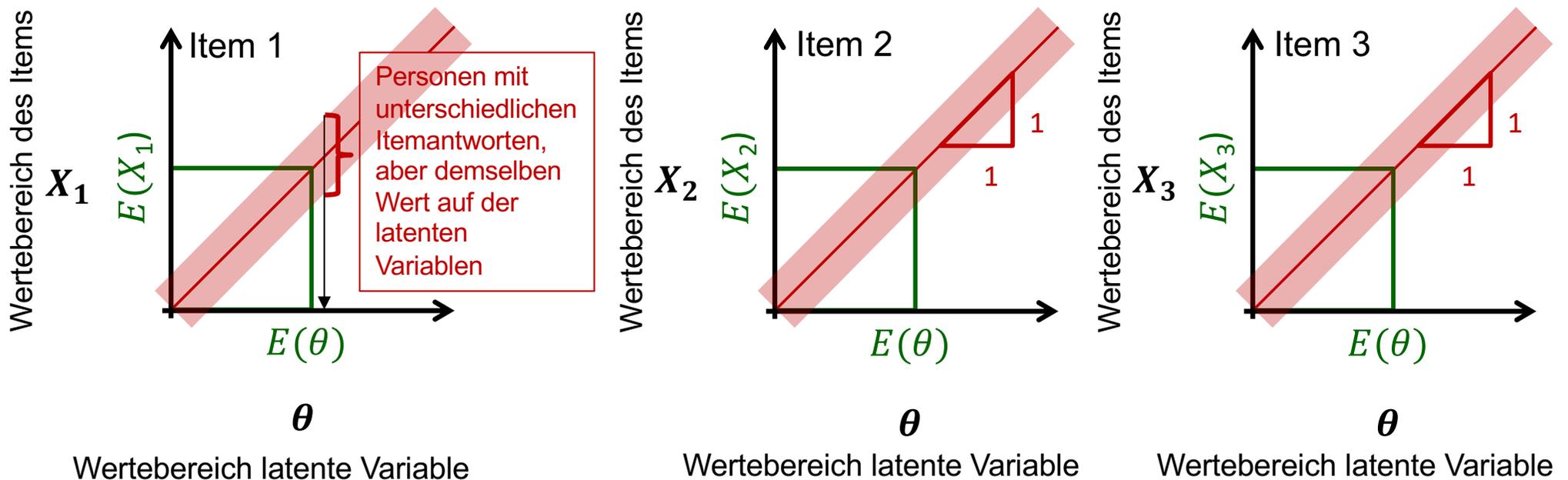
- Die zweite Annahme bezieht sich auf die Varianzen der Fehlervariablen  $\varepsilon_i$  der Items des Tests
- In Worten: „Die Varianzen der Fehlervariablen sind für alle Items gleich groß“
- Zur Erinnerung: Die Fehlervariable auf einem Item  $i$  ist definiert als die Abweichung zwischen zufälligem wahren Wert  $\tau_i$  und der Itemantwort  $X_i$  auf dem Item  $i$
- Bemerkung: Die Fehlervariablen  $\varepsilon_i$  selbst müssen nicht gleich sein, z.B.  $\varepsilon_1 = 4$ ,  $\varepsilon_2 = -3$ ,  $\varepsilon_j = 1$  und  $\varepsilon_k = -2$ , nur Ihre Varianzen müssen gleich sein, z.B.  $VAR(\varepsilon_1) = 3$ ,  $VAR(\varepsilon_2) = 3$ ,  $VAR(\varepsilon_j) = 3$  und  $VAR(\varepsilon_k) = 3$

$$VAR(\varepsilon_i) = VAR(\varepsilon_j) \text{ für alle Itempaare } i, j$$

- Bezogen auf unser Reaktionszeit-Beispiel:
  - Das Modell nimmt an, dass die empirischen Varianzen der Abweichungen zwischen den durchschnittlichen Reaktionszeiten einer Person und den tatsächlichen Reaktionszeiten bei unendlicher Wiederholung des Tests auf beiden Items exakt gleich sind
  - Wenn z.B. der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit“) einer Person auf dem ersten Stimulus 180(ms) ist und auf dem zweiten Stimulus auch 180(ms), dann sollten die tatsächlichen Reaktionszeiten der Person auf diese beiden Stimuli bei unendlicher Wiederholung jeweils in gleichem Maße um diese beiden wahren Werte streuen

$$VAR(\varepsilon_i) = VAR(\varepsilon_j) \text{ für alle Itempaare } i, j$$

- Grafische Veranschaulichung:



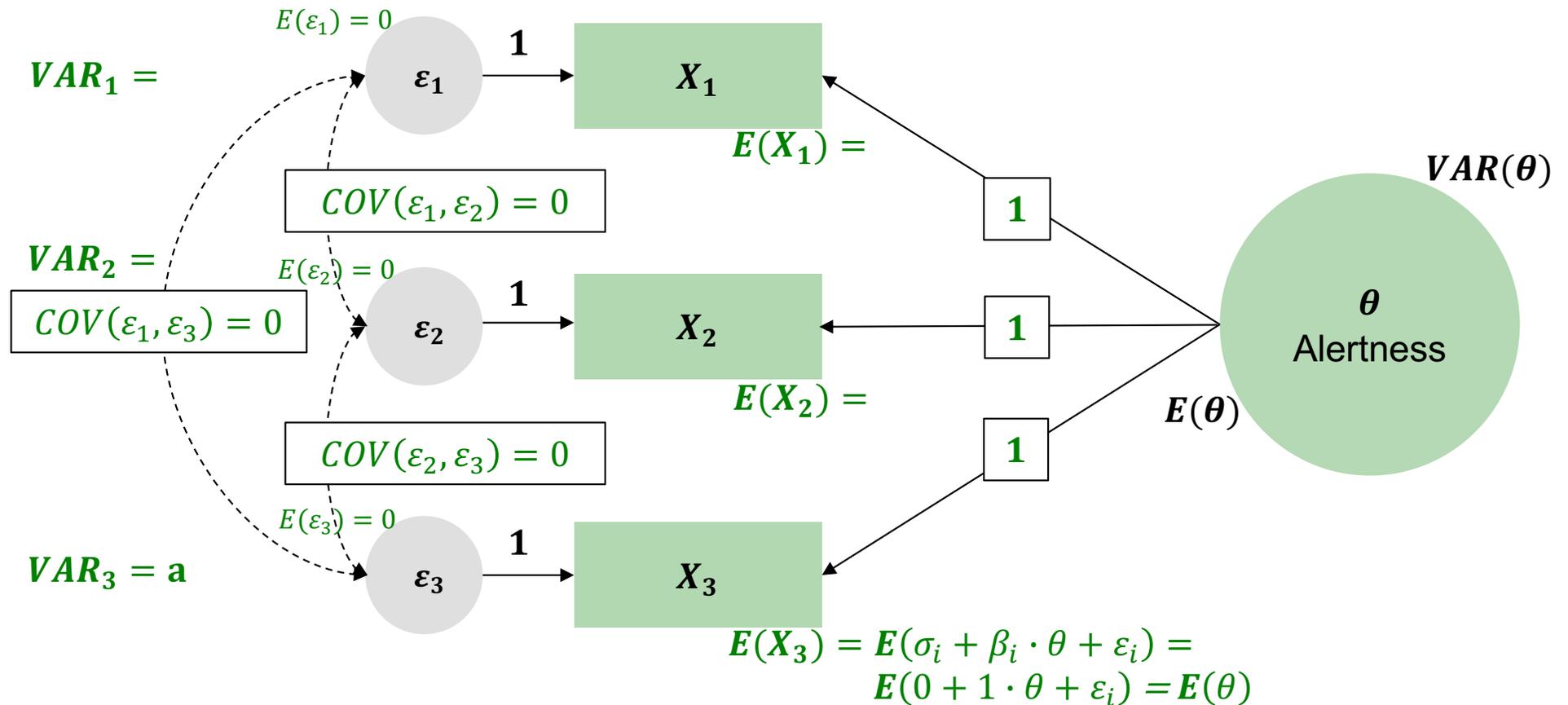
Rote Balken gleich breit  $\rightarrow$  gleiche Fehlervarianz

$$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ für alle Itempaare } i, j$$

- Die dritte Annahme bezieht sich auf den Zusammenhang der Fehlervariablen zweier beliebiger Items des Tests
- In Worten: „Die Fehlervariablen zweier beliebiger Items des Tests kovariieren nicht“
- Die Annahme bedeutet, dass es keinen Zusammenhang zwischen der Abweichung des tatsächlichen Wertes von dem wahren Wert auf einem Item und der Abweichung des tatsächlichen Wertes von dem wahren Wert auf einem anderen Item geben darf
- Beispiele für Verletzungen der Annahme: Inhaltliche Abhängigkeit der Items, Übungseffekte, Frustration während der Testbeantwortung, etc.

$$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ für alle Itempaare } i, j$$

- Bezogen auf unser Reaktionszeit-Beispiel:
  - Das Modell nimmt an, dass die Kovarianz der Abweichungen der tatsächlichen Reaktionszeiten von den durchschnittlichen Reaktionszeiten einer Person bei unendlicher Wiederholung des Tests zwischen beiden Items exakt Null ist
  - Wenn z.B. der wahre Wert (also die „wahre Reaktionszeit“) einer Person auf beiden Stimuli 180(ms) ist und sie schon nach 150(ms) auf den ersten Stimuli reagiert (d.h. negative Abweichung von ihrem wahren Wert), dann sollte dies keinen Einfluss darauf haben, ob sie auf den zweiten Stimuli langsamer oder schneller als ihr wahrer Wert (=180) reagiert



Fixierte Parameter in dunkelgrün!

- *Ausblick:* In der nächsten Vorlesung lernen wir weitere testtheoretische Modelle kennen.
- *Aber zuerst:*
  - **Gibt es offene Fragen zur heutigen Vorlesung?**
  - Zur Vertiefung:
    - Übungsblatt 2 auf Moodle
    - Bühner (2021, Kapitel 4.4, S. 119-152)



- Warum folgt aus dem parallelen Modell, dass bei Gleichheit der Fehlervarianzen auch alle Varianzen gleich sind?

- Wir wissen von einem parallelen Modell:

$$\tau_i = \theta \text{ und } X_i = \theta + \varepsilon_i \text{ und } \mathbf{VAR}(\varepsilon_i) = \mathbf{VAR}(\varepsilon_j)$$

- Beispiel mit drei Items:

$$\mathbf{VAR}(X_1) = \mathbf{VAR}(\theta + \varepsilon_1) = \mathbf{VAR}(\theta) + \mathbf{VAR}(\varepsilon_1) = \mathbf{VAR}(\theta) + \mathbf{VAR}(\varepsilon)$$

$$\mathbf{VAR}(X_2) = \mathbf{VAR}(\theta + \varepsilon_2) = \mathbf{VAR}(\theta) + \mathbf{VAR}(\varepsilon_2) = \mathbf{VAR}(\theta) + \mathbf{VAR}(\varepsilon)$$

$$\mathbf{VAR}(X_3) = \mathbf{VAR}(\theta + \varepsilon_3) = \mathbf{VAR}(\theta) + \mathbf{VAR}(\varepsilon_3) = \mathbf{VAR}(\theta) + \mathbf{VAR}(\varepsilon)$$

denn:

- Rechenregel **B6**: falls  $COV(X, Y) = 0$  gilt, dass  $VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y)$
- Folgerung **E4**:  $COV(\tau_i, \varepsilon_i) = 0$