

Psychologische Testtheorie

Sitzung 8

Faktorenanalyse I



We are happy to share our materials openly:

The content of these Open Educational Resources by Lehrstuhl für Psychologische Methodenlehre und Diagnostik, Ludwig-Maximilians-Universität München is licensed under CC BY-SA 4.0. The CC Attribution-ShareAlike 4.0 International license means that you can reuse or transform the content of our materials for any purpose as long as you cite our original materials and share your derivatives under the same license.

1. Mithilfe eines Omnibushypothesentests können alle Folgerungen eines testtheoretischen Modells auf einmal getestet werden, wodurch sich eine höhere statistische Power im Vergleich zur separaten Testung aller Folgerung ergibt.
2. Angenommen für einen Prokrastinations-Fragebogen konnten die Folgerungen des τ -kongenerischen und des essentiell τ -äquivalenten Modells angenommen werden. Sie müssen nun das essentiell τ -äquivalente Modell wählen, um die Reliabilität des Tests zu untersuchen.
3. ...

3. Ihnen liegt folgender Ausschnitt aus den Parameterschätzungen für eine Neurotizismus-Skala in R vor:

Model Test Baseline Model:						
Test statistic		4059.259				
Degrees of freedom		66				
P-value		0.007				
Intercepts:						
	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)	Std.lv	Std.all
.item1	0.000				0.000	0.000
.item2	0.000				0.000	0.000
.item3	0.000				0.000	0.000
.item4	0.000				0.000	0.000
.item5	0.000				0.000	0.000
.item6	0.000				0.000	0.000
NEURO	1.650	0.027	61.672	0.000	1.650	1.650
Variances:						
	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)	Std.lv	Std.all
NEURO	1.000				1.000	1.000
.item1	0.390	0.016	24.421	0.000	0.390	0.281
.item2	0.491	0.020	24.935	0.000	0.491	0.329
.item3	0.460	0.019	24.801	0.000	0.460	0.315
.item3	0.671	0.026	25.467	0.000	0.671	0.402
.item4	0.527	0.021	25.069	0.000	0.527	0.345
.item5	0.492	0.020	24.936	0.000	0.492	0.330
.item6	0.427	0.017	24.637	0.000	0.427	0.299

- Hier wurde ein paralleles Modell getestet.
- Die latente Variable Neurotizismus weist einen Erwartungswert von 1.65 auf.
- Sie können davon ausgehen, dass die Folgerungen aus dem getesteten testtheoretischen Modell erfüllt sind.

Sitzung	Datum	Thema	Themenblock
1	14.10.24	Einführung	Begriffe, Modellierung von Antwortverhalten durch Zufallsvariablen & mathematische Grundlagen der Testtheorie
2	21.10.24	Wahrscheinlichkeitstheoret. Grundlagen	
3	28.10.24	Testtheoretische Modelle I	Testtheoretische Modelle
4	04.11.24	Testtheoretische Modelle II	
5	11.11.24	Testtheoretische Modelle III	
6	18.11.24	Skalierung I	Gütekriterien psychologischer Tests
7	25.11.24	Skalierung II	
8	02.12.24	Faktorenanalyse I	
9	09.12.24	Faktorenanalyse II + Reliabilität I	

➔ In der heutigen Vorlesung beschäftigen wir uns genauer mit der Schätzung mehrdimensionaler τ -kongenerischer Modelle im Rahmen der Faktorenanalyse.

1. Einleitung

- Die **Faktorenanalyse** ist ein statistisches Verfahren zur Schätzung der Parameter ein- oder mehrdimensionaler Testmodelle
- Es gibt zwei Arten von Faktorenanalysen:

- Konfirmatorische Faktorenanalysen (**Confirmatory Factor Analysis: CFA**)

Eine **CFA** schätzt die Parameter eines (nahezu) **beliebigen vorgegebenen Testmodells** und prüft dessen Annahmen (z.B. dreidimensionales paralleles Testmodell) ➤ siehe Parameterschätzung und Modelltest aus Vorlesung #07

- Exploratorische Faktorenanalysen (**Exploratory Factor Analysis: EFA**)

Eine **EFA** schätzt die Parameter eines ein- oder mehrdimensionalen **τ -kongenerischen Modells**

Wann setze ich welche Art der Faktorenanalyse ein?

- 1) Man hat eine **Theorie** welches Testmodell angemessen ist → **CFA**
- Diese Theorie umfasst folgende Informationen (= theoriegeleitete Annahmen):
 - Anzahl der latenten Variablen
 - Zuordnung der Items zu den latenten Variablen
 - Evtl. **Restriktionen** des Testmodells
(im Vergleich zum mehrdimensionalen τ - kongenerischen Modell)
 - Evtl. **Erweiterungen** des Testmodells
(im Vergleich zum mehrdimensionalen τ - kongenerischen Modell)

Wann setze ich welche Art der Faktorenanalyse ein?

- 2) Man hat **keine Theorie** oder die CFA hat das **Modell abgelehnt**, ohne dass klare Hinweise zur Anpassung des Modells abgeleitet werden können → **EFA**
- Anzahl der latenten Variablen theoretisch vorgegeben oder empirisch bestimmt
 - Keine theoriegeleiteten Annahmen über die Zuordnung der Items zu den latenten Variablen – diese geschieht rein empirisch bei der Schätzung
 - Feste Vorgabe des ein- oder mehrdimensionalen τ -kongenerischen Testmodells ohne Möglichkeit von Anpassungen (d.h., keine Restriktionen/Erweiterungen)
 - Achtung: Das mehrdimensionale τ -kongenerische Modell ist nicht identifiziert, weshalb Steigungsparameter und Korrelationen zwischen den latenten Variablen nur nach einer sog. Rotation geschätzt werden können (ab Folie 50)
 - Modellevaluation möglich, steht aber nicht im Vordergrund

Welche Schritte kann eine Faktorenanalyse umfassen?

1. Bestimmung der Anzahl an latenten Variablen

→ In der CFA stets theoriegeleitet, in der EFA theoriegeleitet oder empirisch ermittelt

2. Spezifikation des Testmodells

→ In der CFA beliebig, in der EFA stets ein ein- bzw. mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

3. Schätzung des Testmodells

→ Auswahl an verschiedenen Schätzmethoden für CFA und EFA

→ EFA erfordert zudem Auswahl einer Rotationstechnik

4. Evaluation der Modellpassung

→ Wesentliches Ziel der CFA, in der EFA aber von nachgestellter Bedeutung (und deshalb hier nur für die CFA betrachtet)

5. Interpretation der Modellparameter

→ Hauptinteresse in der CFA und EFA oft auf den Steigungsparametern

6. Weiterführende Schritte

z.B. Prüfung weiterer Gütekriterien (Vorlesung #9 bis #11), Schätzung der Ausprägung einzelner Personen auf der latenten Variable (Vorlesung #12 und #13)

2. Spezifikation eines Testmodells

Welche Schritte kann eine Faktorenanalyse umfassen?

1. Bestimmung der Anzahl an latenten Variablen

→ In der CFA stets theoriegeleitet, in der EFA theoriegeleitet oder empirisch ermittelt

2. Spezifikation des Testmodells

→ In der CFA beliebig, in der EFA stets ein ein- bzw. mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

3. Schätzung des Testmodells

→ Auswahl an verschiedenen Schätzmethoden für CFA und EFA

→ EFA erfordert zudem Auswahl einer Rotationstechnik

4. Evaluation der Modellpassung

→ Wesentliches Ziel der CFA, in der EFA aber von nachgestellter Bedeutung (und deshalb hier nur für die CFA betrachtet)

5. Interpretation der Modellparameter

→ Hauptinteresse in der CFA und EFA oft auf den Steigungsparametern

6. Weiterführende Schritte

z.B. Prüfung weiterer Gütekriterien (Vorlesung #9 bis #11), Schätzung der Ausprägung einzelner Personen auf der latenten Variable (Vorlesung #12 und #13)

Kurze Wiederholung: Mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

- Im **q -dimensionalen τ -kongenerischen Modell** werden folgende beiden Annahmen getroffen:

$$\tau_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \dots + \beta_{iq} \cdot \theta_q \text{ und somit}$$

$$X_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \dots + \beta_{iq} \cdot \theta_q + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

$$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ für alle Itempaare } i, j$$

Kurze Wiederholung: Mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

$$\tau_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \cdots + \beta_{iq} \cdot \theta_q \text{ und somit}$$
$$X_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \cdots + \beta_{iq} \cdot \theta_q + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Die Konstanten σ_i werden **Itemparameter** genannt
 - Es gibt für jeden Test genau k Itemparameter
- Die Konstanten β_{il} werden **Steigungsparameter** genannt
 - Es gibt für jedes Item genau q Steigungsparameter

Kurze Wiederholung: Mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

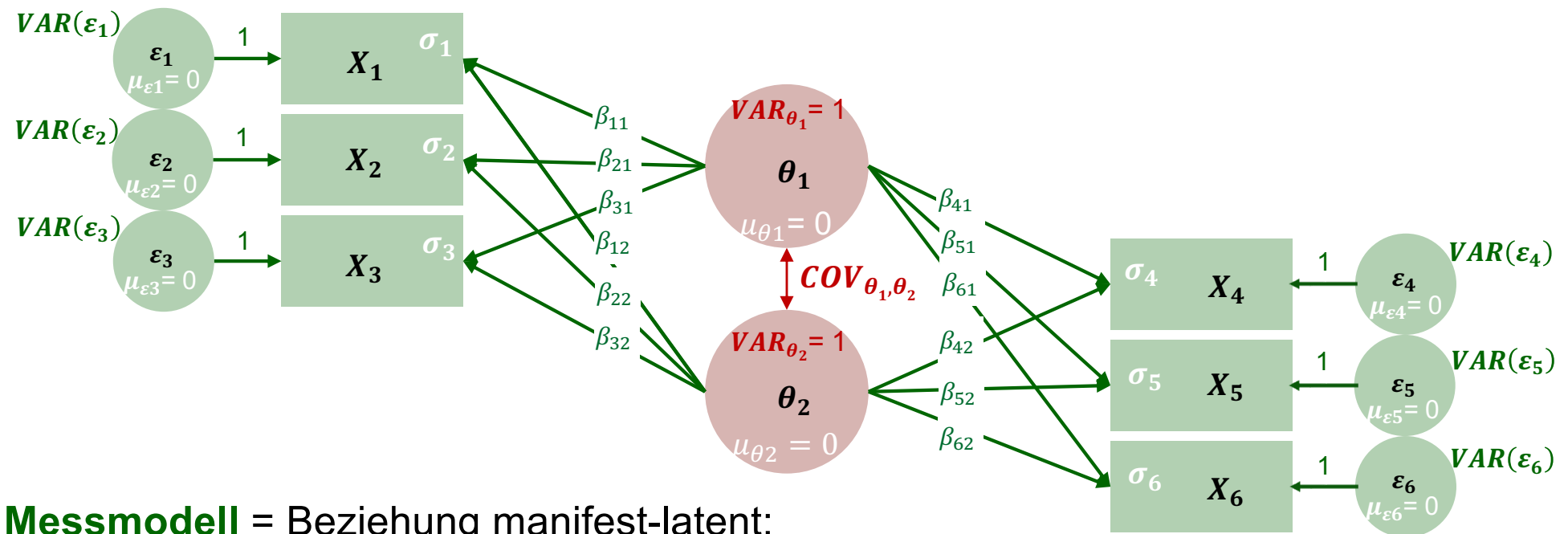
- Falls die nicht z-standardisierten Items einem (ein- oder) mehrdimensionalen τ -kongenerischen Modell folgen, dann folgen auch die **z-standardisierten Items** einem (ein- oder) mehrdimensionalen τ -kongenerischen Modell, jedoch hat dieses Modell andere **Steigungsparameter** β_{zil} und **Fehlervariablen** ε_{zi} und **keine Itemparameter** mehr:

$$Z_i = \beta_{zi1} \cdot \theta_1 + \beta_{zi2} \cdot \theta_2 + \dots + \beta_{ziq} \cdot \theta_q + \varepsilon_{zi} \text{ für alle Items } i$$

- Die **standardisierten Steigungsparameter** β_{zil} und die **Varianzen** $VAR(\varepsilon_{zi})$ **der standardisierten Fehlervariablen** sind die Parameter, die im Rahmen der Faktorenanalyse (v.a. der EFA) häufig angegeben werden
- Interpretation: „**Falls sich die latente Variable l um eine Standardabweichung erhöht, erhöht sich die durchschnittliche Itemantwort auf Item i um β_{zil} Standardabweichungen, falls alle anderen latenten Variablen des Modells konstant bleiben.**“

Ein- oder mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell ohne Spezifikationen:

(Bsp. zweidimensionales τ -kongenerisches Modell)



Messmodell = Beziehung manifest-latent:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma_1 + \beta_{11} \cdot \theta_1 + \beta_{12} \cdot \theta_2 + \varepsilon_1 \\ X_2 &= \sigma_2 + \beta_{21} \cdot \theta_1 + \beta_{22} \cdot \theta_2 + \varepsilon_2 \\ X_3 &= \sigma_3 + \beta_{31} \cdot \theta_1 + \beta_{32} \cdot \theta_2 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4 &= \sigma_4 + \beta_{41} \cdot \theta_1 + \beta_{42} \cdot \theta_2 + \varepsilon_4 \\ X_5 &= \sigma_5 + \beta_{51} \cdot \theta_1 + \beta_{52} \cdot \theta_2 + \varepsilon_5 \\ X_6 &= \sigma_6 + \beta_{61} \cdot \theta_1 + \beta_{62} \cdot \theta_2 + \varepsilon_6 \end{aligned}$$

Strukturmodell = Beziehung latent-latent: COV_{θ_1, θ_2}

$$\tau_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \dots + \beta_{iq} \cdot \theta_q \text{ und somit}$$

$$X_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \dots + \beta_{iq} \cdot \theta_q + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Wie wird das **mehrdimensionale τ -kongenerische Modell** restriktiver?
 - Durch die Festlegung („Fixierung“) bestimmter Parameter im Modell
 - Beispiel:
 - Festlegung der Steigungsparameter auf $\beta_{i1} = \beta_{i2} = \beta_{iq} = 1$
d.h., $X_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2 + \dots + 1 \cdot \theta_q + \varepsilon_i$ für alle Items i
 - Zusätzliche Annahme, dass alle Items i gleiche Fehlervarianzen $VAR(\varepsilon_1) = VAR(\varepsilon_2) = VAR(\varepsilon_3) = a$ aufweisen
 - Annahme von Einfachstruktur (siehe Folie 41)
 - Ergibt ein **mehrdimensionales essentiell paralleles Modell mit Einfachstruktur!**

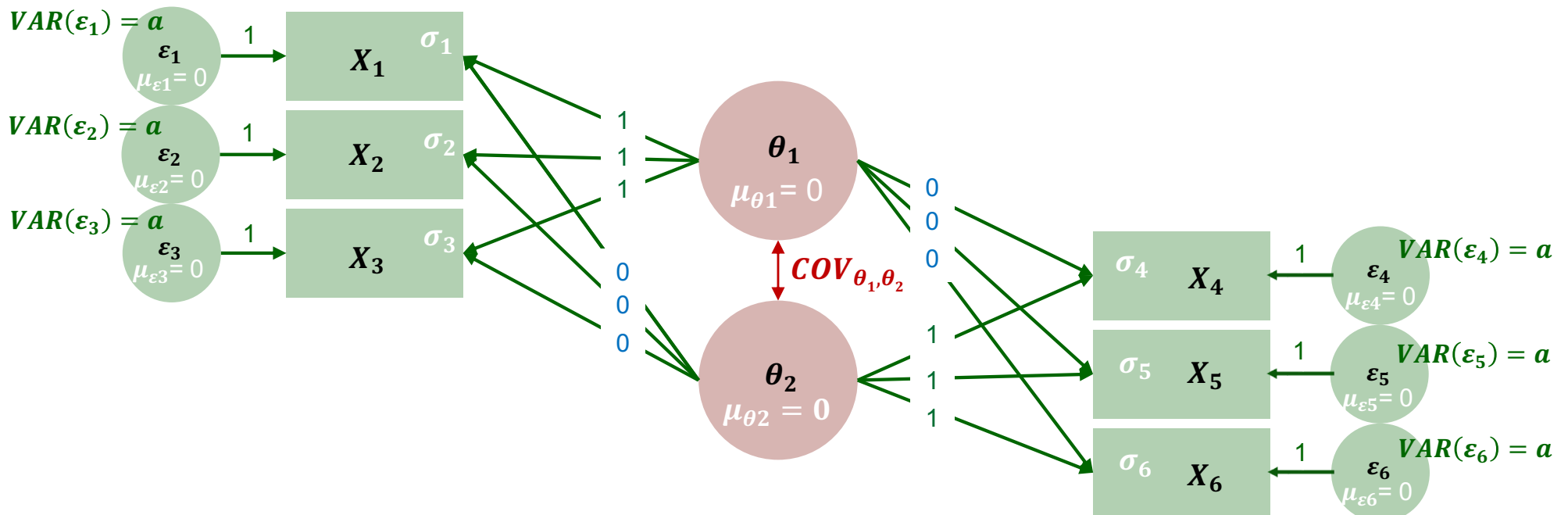
- Beispiel für ein **restriktiveres** mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell: ein **mehrdimensionales essentiell paralleles Modell** mit **Einfachstruktur**

$$\tau_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta_1 + \mathbf{0} \cdot \theta_2 \text{ und } \tau_j = \sigma_j + \mathbf{0} \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2$$

$$X_i = \sigma_i + \mathbf{1} \cdot \theta_1 + \mathbf{0} \cdot \theta_2 + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

$$X_j = \sigma_j + \mathbf{0} \cdot \theta_1 + \mathbf{1} \cdot \theta_2 + \varepsilon_j \text{ für alle Items } j$$

$$VAR(\varepsilon_1) = VAR(\varepsilon_2) = \dots = VAR(\varepsilon_k) = a$$



$$\tau_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \dots + \beta_{iq} \cdot \theta_q \text{ und somit}$$

$$X_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \dots + \beta_{iq} \cdot \theta_q + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Wie wird das **mehrdimensionale τ -kongenerische Modell** weniger restriktiv?
 - Zuvor fixierte Parameter im Modell werden frei geschätzt
 - Beispiel:
 - Festlegung, dass ein konkretes Itempaar kovariieren darf,
z.B. $COV(\varepsilon_4, \varepsilon_5) = \lambda$ statt $COV(\varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0$
 - ergibt ein **mehrdimensionales essentiell paralleles Modell mit Einfachstruktur und korreliertem Messfehler!**

- Beispiel für ein **weniger restriktives** mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell:
ein mehrdimensionales essentiell paralleles Modell mit Einfachstruktur und korreliertem Messfehler

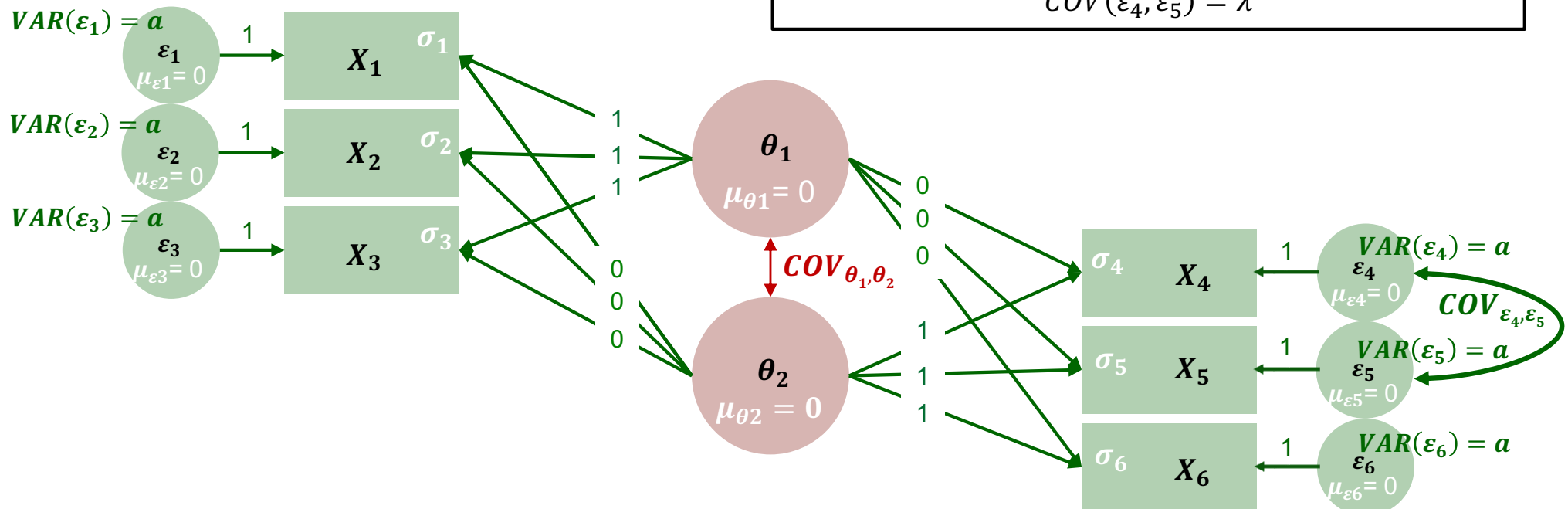
$$\tau_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 \text{ und } \tau_j = \sigma_j + 0 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2$$

$$X_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

$$X_j = \sigma_j + 0 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2 + \varepsilon_j \text{ für alle Items } j$$

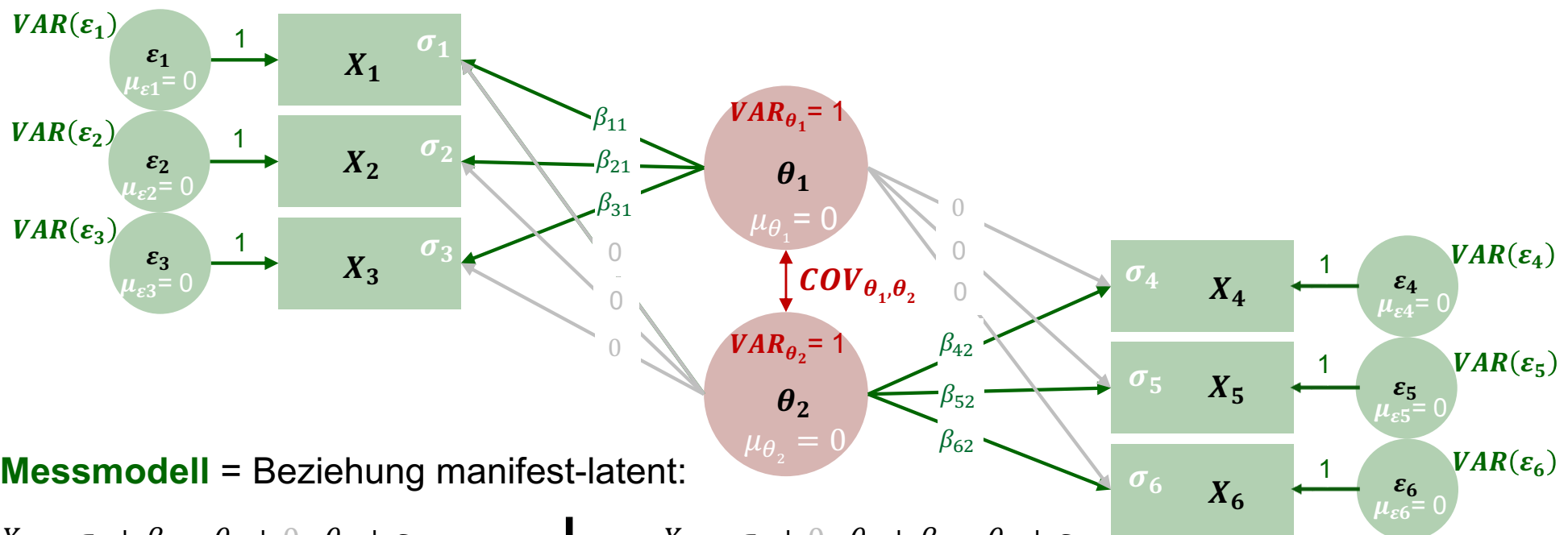
$$VAR(\varepsilon_1) = VAR(\varepsilon_2) = \dots = VAR(\varepsilon_k) = a$$

$$COV(\varepsilon_4, \varepsilon_5) = \lambda$$



Im Gegensatz zur EFA, kann das Testmodell der CFA (nahezu) beliebig spezifiziert werden, in dem Restriktionen oder Erweiterungen des ein- oder mehrdimensionalen τ -kongenerischen Modells vorgenommen werden!

z.B. zweidimensionales restringiertes τ -kongenerisches Modell mit Einfachstruktur



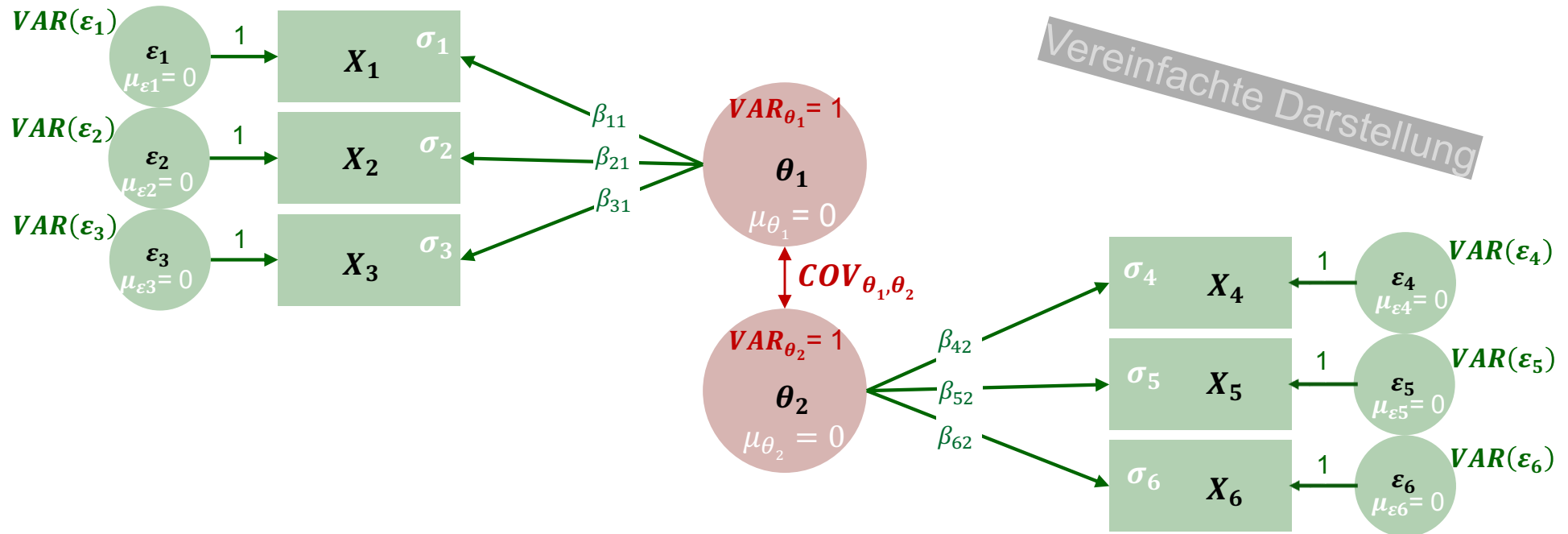
Messmodell = Beziehung manifest-latent:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma_1 + \beta_{11} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_1 \\ X_2 &= \sigma_2 + \beta_{21} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_2 \\ X_3 &= \sigma_3 + \beta_{31} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4 &= \sigma_4 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{42} \cdot \theta_2 + \varepsilon_4 \\ X_5 &= \sigma_5 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{52} \cdot \theta_2 + \varepsilon_5 \\ X_6 &= \sigma_6 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{62} \cdot \theta_2 + \varepsilon_6 \end{aligned}$$

Strukturmodell = Beziehung latent-latent: COV_{θ_1, θ_2}

Zweidimensionales restringiertes τ -kongenerisches CFA Modell mit Einfachstruktur:



Messmodell = Beziehung manifest-latent:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma_1 + \beta_{11} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_1 \\ X_2 &= \sigma_2 + \beta_{21} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_2 \\ X_3 &= \sigma_3 + \beta_{31} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4 &= \sigma_4 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{42} \cdot \theta_2 + \varepsilon_4 \\ X_5 &= \sigma_5 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{52} \cdot \theta_2 + \varepsilon_5 \\ X_6 &= \sigma_6 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{62} \cdot \theta_2 + \varepsilon_6 \end{aligned}$$

Strukturmodell = Beziehung latent-latent: COV_{θ_1, θ_2}

3. Faktorenanalytische Schätzmethode

Welche Schritte kann eine Faktorenanalyse umfassen?

1. Bestimmung der Anzahl an latenten Variablen

→ In der CFA stets theoriegeleitet, in der EFA theoriegeleitet oder empirisch ermittelt

2. Spezifikation des Testmodells

→ In der CFA beliebig, in der EFA stets ein ein- bzw. mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

3. Schätzung des Testmodells

→ Auswahl an verschiedenen Schätzmethoden für CFA und EFA

→ EFA erfordert zudem Auswahl einer Rotationstechnik

4. Evaluation der Modellpassung

→ Wesentliches Ziel der CFA, in der EFA aber von nachgestellter Bedeutung (und deshalb hier nur für die CFA betrachtet)

5. Interpretation der Modellparameter

→ Hauptinteresse in der CFA und EFA oft auf den Steigungsparametern

6. Weiterführende Schritte

z.B. Prüfung weiterer Gütekriterien (Vorlesung #9 bis #11), Schätzung der Ausprägung einzelner Personen auf der latenten Variable (Vorlesung #12 und #13)

- Zur Erinnerung:
 - **EFA:** Jeder EFA liegt das gleiche testtheoretische Modell zugrunde, nämlich das ein- bzw. mehrdimensionale τ -kongenerische Modell
 - **CFA:** Im Rahmen einer CFA können auch andere restriktivere oder weniger restriktive Modelle getestet werden. Sie lassen sich als Modelle darstellen, in denen Parameter des EFA Modells auf bestimmte Werte fixiert (restriktivere Modelle) oder frei geschätzt (weniger restriktive Modelle) werden
- Es gibt verschiedene Schätzmethoden für CFA und EFA:
 - **Maximum-Likelihood-Faktorenanalyse** (ML)
 - Weitere Methoden wie z.B. WLS, WLSM, ULS, WLSMV ...
 - Es gibt außerdem ein Verfahren namens **Hauptkomponentenanalyse** (PCA oder PC), das streng genommen keine EFA ist, aber oft die selben Ergebnisse liefert und das in R auch als „Schätzmethode“ spezifiziert werden kann
- Wir werden uns hier auf die ML-Schätzmethode beschränken, aber auch diese nicht im Detail besprechen, sondern uns auf R Outputs fokussieren



Ausgangsbasis:

Empirische Kovarianzmatrix S (oder Korrelationsmatrix R)

$cov(x_1, x_1)$
 $cov(x_2, x_1) \quad cov(x_2, x_2)$
 $cov(x_3, x_1) \quad cov(x_3, x_2) \quad cov(x_3, x_3)$

Beispiel

	n7	n32	n37
n7	0.53	0.09	0.22
n32	0.09	0.39	0.12
n37	0.22	0.12	0.48

Schätzung von σ_i und β_i so,
dass die **Diskrepanz von Σ
und S möglichst gering** wird
→ Iteratives Vorgehen

Zwischenschritt:

vom Modell implizierte, geschätzte Kovarianzmatrix Σ (oder Korrelationsmatrix P)

$cov(\sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon_1, \sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon_1)$
 $cov(\sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta + \varepsilon_2, \sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon_1) \quad cov(\sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta + \varepsilon_2, \sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta + \varepsilon_2)$
 $cov(\sigma_3 + \beta_3 \cdot \theta + \varepsilon_3, \sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon_1) \quad cov(\sigma_3 + \beta_3 \cdot \theta + \varepsilon_3, \sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta + \varepsilon_2) \quad cov(\sigma_3 + \beta_3 \cdot \theta + \varepsilon_3, \sigma_3 + \beta_3 \cdot \theta + \varepsilon_3)$

Ergebnis: Empirische Matrix der Steigungsparameter B

$\beta_{11} \quad \beta_{12}$
 $\beta_{21} \quad \beta_{22}$
 $\beta_{31} \quad \beta_{32}$

Beispiel

	ML1	ML2
n7	0.36	-0.02
n32	0.25	0.25
n37	0.60	-0.12

(Beispiel: 3 Items, zweidimensionales Modell)



- Im Rahmen der CFA wird häufig die Kovarianzmatrix S als Basis für die Parameterschätzung verwendet
- Im Rahmen der EFA wird häufig die Korrelationsmatrix R als Basis für die Parameterschätzung verwendet
- Die Verwendung der unterschiedlichen Matrizen führt zu unterschiedlichen Lösungen, der Prozess der Schätzung der Parameter ist aber immer gleich
- Weitere Details zur Parameterschätzung werden im Rahmen der Mastervorlesung zu Strukturgleichungsmodellen besprochen

4. Modellevaluation

Welche Schritte kann eine Faktorenanalyse umfassen?

1. Bestimmung der Anzahl an latenten Variablen

→ In der CFA stets theoriegeleitet, in der EFA theoriegeleitet oder empirisch ermittelt

2. Spezifikation des Testmodells

→ In der CFA beliebig, in der EFA stets ein ein- bzw. mehrdimensionales τ -kongenerisches Modell

3. Schätzung des Testmodells

→ Auswahl an verschiedenen Schätzmethoden für CFA und EFA

→ EFA erfordert zudem Auswahl einer Rotationstechnik

4. Evaluation der Modellpassung

→ Wesentliches Ziel der CFA, in der EFA aber von nachgestellter Bedeutung (und deshalb hier nur für die CFA betrachtet)

5. Interpretation der Modellparameter

→ Hauptinteresse in der CFA und EFA oft auf den Steigungsparametern

6. Weiterführende Schritte

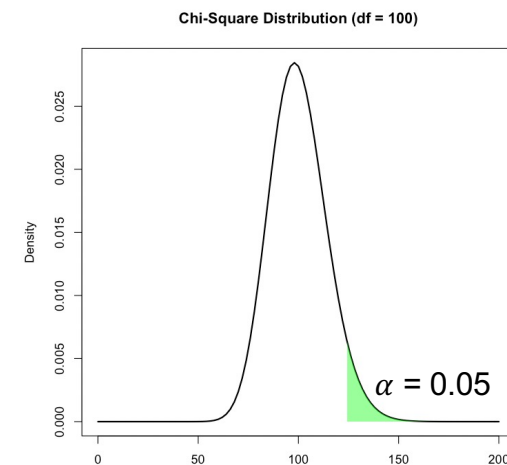
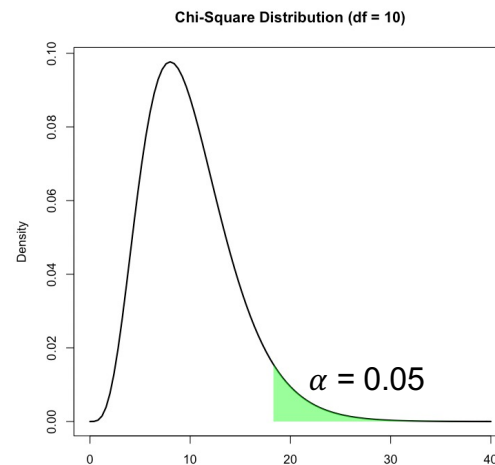
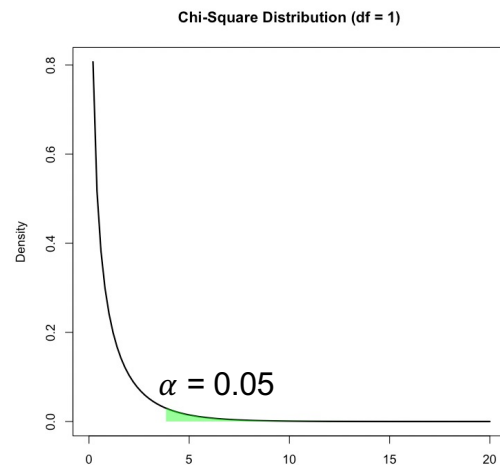
z.B. Prüfung weiterer Gütekriterien (Vorlesung #9 bis #11), Schätzung der Ausprägung einzelner Personen auf der latenten Variable (Vorlesung #12 und #13)

- Es gibt verschiedene Methoden um die Modellpassung (**Modellfit**) in der CFA zu evaluieren
- Sie unterscheiden sich darin, ob sie den Modellfit global oder lokal untersuchen:
 - **Globaler Modellfit** → Wie gut passt das Modell als Ganzes, d.h. mit all seinen Folgerungen, auf die Daten?
 - Modelltest (Omnibushypothesentest aus Vorlesung #07)
 - Fit-Indizes
 - Informationskriterien
 - **Lokaler Modellfit** → Wie gut passen die einzelne Folgerungen des Modells jeweils auf die Daten bzw. wo sind Verletzungen dieser Folgerungen?
 - Inspektion der frei geschätzten Parameter (z.B. Steigungsparameter, Varianz der latenten Variablen) und deren Signifikanz
 - Modifikationsindizes



- Lässt sich die Diskrepanz zwischen S und Σ (bzw. P und R) iterativ nicht weiter reduzieren, ergibt sich das Minimum bzw. der **Value of the Fitting-Function** (VFF)
- Multipliziert man den VFF mit $n - 1$ erhält man eine Chi-Quadrat verteilte
Teststatistik: $\chi_{emp}^2 = VFF \cdot (n - 1)$
- Diese Teststatistik prüft die Nullhypothese:
 - Σ Modell Population = S Population (bzw. P Modell Population = R Population)
 - und bedeutet „übersetzt“: „Modell wird in Population nicht verworfen“
- Die **Freiheitsgrade** für den Modelltest ergeben sich aus der Anzahl der bekannten Größen minus der Anzahl der zu schätzenden Größen
 - Die Anzahl der bekannten Größen sind Einträge der Kovarianzmatrix plus die fixierten/festgelegten Größen
 - Die Anzahl der zu schätzenden Größen sind die unbekannten Größen

- Die für den Hypothesentest verwendete Teststatistik ist approximativ (bei großen Stichprobengrößen) χ^2 -verteilt



- Wir können daher auf Basis der χ^2 -Verteilung p -Werte angeben und eine Testentscheidung treffen:
 - $p \leq 0.05$: Entscheidung für H_1
 - $p > 0.05$: Entscheidung für H_0

Model Test User Model:

Test statistic	918.730
Degrees of freedom	54
P-value (Chi-square)	0.000

- Zusätzlich zum Signifikanztest geben bestimmte **Fit-Indizes** an, wie stark das geschätzte Modell von einem perfekten Modell abweicht:
 - **SRMR - Standardized-Squared-Mean-Residual**
 - **RMSEA - Root-Mean-Square-Error-of-Approximation**
- Ideale Werte liegen bei 0, akzeptable Werte sind
 - für den $SRMR \leq 0.11$
 - für den $RMSEA \leq 0.08$ (*bei $n < 250$*) bzw. $RMSEA \leq 0.06$ (*bei $n > 250$*)
- Achtung: Diese Angaben (nach Hu & Bentler, 1998) sind nur grobe Richtwerte für die ML-Methode!

- Zusätzlich zum Signifikanztest geben bestimmte **Fit-Indizes** an, wie stark das geschätzte Modell von einem perfekten Modell abweicht.
- Es gibt auch Möglichkeiten um Cut-Off Werte für ein konkretes aufgestelltes Modell mithilfe von R zu simulieren
 - Dazu wird ein maximal restriktives Nullmodell simuliert vor, in dem alle Items unkorreliert sind und das maximal schlechtesten passen sollte
 - Die Passung dieses Nullmodels wird dann mit der Passung des getesteten Modell verglichen und die Abweichung in einem Index ausgedrückt
 - Bekanntester Index: **CFI - Comparative Fit Index**
 - Idealer Wert liegt bei 1
 - Akzeptable Werte sind $CFI \geq 0.95$
 - Achtung: Diese Angaben (nach Hu & Bentler, 1998) sind nur grobe Richtwerte für die ML-Methode!

- Manchmal liegen keine „akzeptablen“ Modelle vor!
→ Lösung: **Informationskriterien**, z.B. **BIC - Bayes Information Criterion**
- In die Beurteilung der Modellgüte fließt beim **BIC** ein,
 - wie gut das Modell passt (χ^2_{emp}),
 - wie groß die Stichprobe ist und
 - wie komplex das Modell ist (d.h., die Anzahl zu schätzender Modellparameter)
- Bevorzugt werden Modelle die gleichzeitig gut passen, aber auch sparsam (d.h., wenig komplex) sind
- Die Werte des BIC können in ihrer absoluten Höhe nicht interpretiert werden, sondern nur relativ zueinander verglichen werden. Man vergleicht den BIC also zwischen verschiedenen Modellen und entscheidet sich für das Modell mit dem niedrigsten BIC
- Vorsicht: Informationskriterien werden in verschiedenen R-Paketen oder andere Statistikprogrammen teils unterschiedlich berechnet! Im Zweifel per Hand berechnen (siehe Bühner, 2021, Kapitel 6 & 7)

User Model versus Baseline Model:

Comparative Fit Index (CFI)	0.783
Tucker-Lewis Index (TLI)	0.735

Loglikelihood and Information Criteria:

Loglikelihood user model (H0)	-17139.704
Loglikelihood unrestricted model (H1)	-16680.339
Akaike (AIC)	34351.408
Bayesian (BIC)	34541.438
Sample-size adjusted Bayesian (SABIC)	34427.078

Root Mean Square Error of Approximation:

RMSEA	0.105
90 Percent confidence interval - lower	0.099
90 Percent confidence interval - upper	0.111
P-value H ₀ : RMSEA ≤ 0.050	0.000
P-value H ₀ : RMSEA ≥ 0.080	1.000

Standardized Root Mean Square Residual:

SRMR	0.067
------	-------

- Die globale Modellpassung gibt keine Auskunft darüber, ob sich tatsächlich jeder geschätzte Parameter in der Population von Null unterscheidet
- Trotz globaler Modellpassung können einzelne Parameter auf Null (oder sehr nahe Null) geschätzt worden sein
 - Zum Beispiel könnte ein Item einen Steigungsparameter von Null aufweisen, was gegen die Zuordnung dieses Items zu der latenten Variable spricht
- **Deshalb sollten die im Modell geschätzten Parameter stets inspiziert werden**
- Zusätzlich kann mithilfe eines **Signifikanztests** für jeden einzelnen Parameter getestet werden, ob dieser sich signifikant von Null unterscheidet
 - H_0 : Der Parameter unterscheidet sich nicht von Null
 - H_1 : Der Parameter unterscheidet sich von Null

Latent Variables:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)	Std.lv	Std.all
EXTRA =~						
n2	0.436	0.020	21.712	0.000	0.436	0.568
n7	0.390	0.019	20.359	0.000	0.390	0.538
n47	0.088	0.019	4.588	0.000	0.088	0.131
...						

- Falls sich in der globalen Modellpassung Probleme offenbart haben, lässt sich prüfen, welche (Mis-)Spezifikationen des Modells hierfür verantwortlich sind
- Sogenannte **Modifikationsindizes** (mi) geben an, wie sich der globale Modellfit (d.h., die χ^2 - Teststatistik) verbessert, wenn man einen zuvor fixierten Parameter freigibt
- Je höher die Werte der Modifikationsindizes, desto größer die Modellverbesserung.
- Basierend auf den Modifikationindizes kann eine entsprechende Re-Spezifikation des Modells vorgenommen werden, wenn die Anpassungen inhaltlich sinnvoll erklärt werden können
 - Zum Beispiel könnte man zulassen, dass die Fehlervariablen zweier Items kovariieren, wenn diese grammatikalisch sehr ähnlich formuliert sind

	lhs	op	rhs	mi	epc
41	n2	~~	n17	120.177	0.118
95	n37	~~	n42	111.704	0.108
43	n2	~~	n27	91.793	0.107
42	n2	~~	n22	79.075	0.106
102	n47	~~	n52	78.861	0.095
64	n12	~~	n37	73.717	0.084

- *Ausblick:* In der nächsten Vorlesung machen wir weiter mit den Grundlagen Faktorenanalyse und schauen uns Anwendungsbeispiele an.
- *Aber zuerst:*
 - **Gibt es offene Fragen zur heutigen Vorlesung?**
 - Zur Vertiefung:
 - Übungsblatt 6 zur Faktorenanalyse folgt nächste Woche
 - Bühner (2021, Kapitel 6 & 7)