

Psychologische Testtheorie

Sitzung 13

Einzelfalldiagnostik I



We are happy to share our materials openly:

The content of these Open Educational Resources by Lehrstuhl für Psychologische Methodenlehre und Diagnostik, Ludwig-Maximilians-Universität München is licensed under CC BY-SA 4.0. The CC Attribution-ShareAlike 4.0 International license means that you can reuse or transform the content of our materials for any purpose as long as you cite our original materials and share your derivatives under the same license.

Es wurde eine neue Skala zur Erfassung der Selbstfürsorge (S) im Studium entwickelt. Laut der Theorie sollten Studierende mit höherer Selbstfürsorge seltener krank sein. Zur Validierung des neuen Fragebogens erheben Sie nun dessen Items, sowie die Anzahl der Arztbesuche im vergangenen Semester (A). McDonalds Omega für die Skala Selbstfürsorge wird auf 0.65 geschätzt. Die beobachtete Pearson-Korrelation zwischen dem Summenwert von Selbstfürsorge und der Anzahl der Arztbesuche beträgt -0.39.

- a) Aus den theoretischen Annahmen ergibt sich die folgende Alternativhypothese zur Validierung des Selbstfürsorgefragebogens: $COR(\theta_S, A) > 0$
- b) Diese Hypothese kann am besten zur Kriteriumsvalidität gezählt werden.
- c) Der minderungskorrigierte Zusammenhang zwischen Selbstfürsorge und Arztbesuchen sollte vom Betrag her niedriger ausfallen als die Pearson-Korrelation oben.
- d) Da die Modellannahmen des Selbstfürsorgefragebogens nicht geprüft wurden, können streng genommen keine Rückschlüsse auf die Validität des Verfahrens gezogen werden.

Sitzung	Datum	Thema	Themenblock
1	14.10.24	Einführung	Begriffe, Modellierung von Antwortverhalten durch Zufallsvariablen & mathematische Grundlagen der Testtheorie
2	21.10.24	Wahrscheinlichkeitstheoret. Grundlagen	
3	28.10.24	Testtheoretische Modelle I	Testtheoretische Modelle
4	04.11.24	Testtheoretische Modelle II	
5	11.11.24	Testtheoretische Modelle III	
6	18.11.24	Skalierung I	Gütekriterien psychologischer Tests
7	25.11.24	Skalierung II	
8	02.12.24	Faktorenanalyse I	
9	09.12.24	Faktorenanalyse II	
10	16.12.24	Reliabilität I	
11	23.12.24	Sitzung entfällt wegen Weihnachten!	
	30.12.24	Offizielle Winterpause	
	06.01.25		
12	13.01.25	Reliabilität II	Gütekriterien psychologischer Tests
13	20.01.25	Validität	
14	27.01.25	Einzelfalldiagnostik I	Methoden der Einzelfalldiagnostik
15	03.02.25	Einzelfalldiagnostik II	

1. Einleitung

Wir erinnern uns an den Unterschied zwischen θ und θ_{person} :

- θ_{person} ist der Wert einer festen Person auf der latenten Variable und damit **für jede Person eine unbekannte Konstante**
- θ ist die **Zufallsvariable**, deren Realisation der Wert θ_{person} einer **zufällig gezogenen Person** ist

- Für alle bisherigen Überlegungen (Skalierung, Parameterschätzung, Reliabilität, Validität) mussten wir die testtheoretischen Modelle auf der Ebene der zufällig gezogenen Personen und zufälligen latenten Variablen θ betrachten, da hier eine Stichprobe von zufällig gezogenen Personen zugrunde lag:
 - Die Hypothesentests im Rahmen der Überprüfung der Skalierung wurden auf der Basis einer Stichprobe durchgeführt
 - Die Parameter des Modells, für das wir uns entschieden haben, wurden auf Basis einer Stichprobe geschätzt
 - Die Reliabilität des Tests wurde auf der Basis einer Stichprobe geschätzt
 - Die Validität des Tests wurde auf Basis der Stichprobe überprüft

- In der Einzelfalldiagnostik interessieren wir uns nun für den latenten Variablenwert θ_{Person} einer festen vor uns sitzenden Person, die unseren Test bearbeitet hat
- Beispiele für Fragestellungen im Rahmen der Einzelfalldiagnostik:
 - Welchen Wert hat die Person auf der latenten Variable?
 - Liegt der Wert der Person auf der latenten Variable über/unter einem bestimmten Wert?
 - Unterscheidet sich die Person in ihrem Wert auf der latenten Variable von einer anderen Person?
 - Hat sich der Wert der Person auf der latenten Variable seit der letzten Testung verändert?

- Bevor wir einen psychologischen Test in der Einzelfalldiagnostik verwenden können, müssen wir ...
 - wissen, welches testtheoretische Modell für die Items des Tests gilt
 - Schätzwerte für die Parameter (Schwierigkeitsparameter, Steigungsparameter, Varianzen der Fehlervariablen) dieses Modells haben
- Die dafür verwendeten Methoden haben wir im Laufe des Semesters kennengelernt
- Beides geschieht im Rahmen der Testkonstruktion auf der Basis einer großen Stichprobe, die auch **Normstichprobe** genannt wird

- In der Einzelfalldiagnostik betrachten wir nun die testtheoretischen Modelle auf der Ebene einer festen Person:
 - Statt den Itemantworten X_i einer zufälligen Person betrachten wir nun die Itemantworten $X_{iPerson}$ einer festen Person
 - Statt den zufälligen latenten Variablen θ betrachten wir nun die latenten Variablenwerte θ_{Person} einer festen Person
- An der Form der Modellgleichungen ändert sich jedoch nichts
 - Falls z.B. das τ -kongenerische Modell gilt, ist die Modellgleichung für die Itemantworten $X_{iPerson}$ einer festen Person

$$X_{iPerson} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta_{Person} + \varepsilon_{iPerson}$$

$$X_{iPerson} = \sigma_i + \beta_i \cdot \theta_{Person} + \varepsilon_{iPerson}$$

- $X_{iPerson}$ ist immer noch eine Zufallsvariable, die für die Itemantwort der festen Person steht
- θ_{Person} ist jetzt eine unbekannte Konstante, das heißt keine Zufallsvariable
- σ_i und β_i sind Parameter des Modells, für die schon **Schätzwerte aus der Normstichprobe** vorliegen
- zwischen ε_i auf der Ebene der zufälligen Person und $\varepsilon_{iPerson}$ auf der Ebene der festen Person gibt es zwar mathematisch gesehen einen geringfügigen Unterschied, der für uns jedoch nicht relevant ist

2. Schätzfunktionen, Standardfehler und Konfidenzintervalle für θ_{Person}

- Eine feste Person antwortet auf k Items eines psychologischen Tests
- Die Itemantworten der Person können als Zufallsvariablen $X_{iPerson}$ aufgefasst werden, deren Realisationen (das heißt, was die Person tatsächlich ankreuzt) wir beobachten können
- Wir wissen, welchem testtheoretischen Modell die Items folgen und haben alle Größen des Modells (z.B. Schwierigkeitsparameter, Steigungsparameter, Varianzen der Fehlervariablen, ...) auf der Basis einer Normstichprobe geschätzt

- Auf der Basis der Itemantworten $X_{iPerson}$ der Person wollen wir ein Konfidenzintervall für den Parameter θ_{Person} (also für den Wert der Person auf der latenten Variable) konstruieren
- Wir werden nun für jedes testtheoretische Modell:
 - eine Schätzfunktion $\hat{\theta}_{Person}$ für θ_{Person} angeben
 - den Standardmessfehler $SE(\hat{\theta}_{Person})$ dieser Schätzfunktion bestimmen
 - mithilfe dieser beiden Größen ein Konfidenzintervall für θ_{Person} konstruieren

- Eine Schätzfunktion $\hat{\theta}_{Person}$ für den Parameter θ_{Person} ist eine von den Itemantworten $X_{iPerson}$ der Person abhängige Zufallsvariable, deren Realisation unser konkreter Schätzwert für den latenten Variablenwert θ_{Person} der Person ist
- Welche Form die Schätzfunktion genau annimmt, unterscheidet sich je nach testtheoretischem Modell

- Der **Standardmessfehler** $SE(\hat{\theta}_{Person})$ ist definiert als die Standardabweichung (= Wurzel der Varianz) der Schätzfunktion $\hat{\theta}_{Person}$ für θ_{Person} :

$$SE(\hat{\theta}_{Person}) = \sqrt{VAR(\hat{\theta}_{Person})}$$

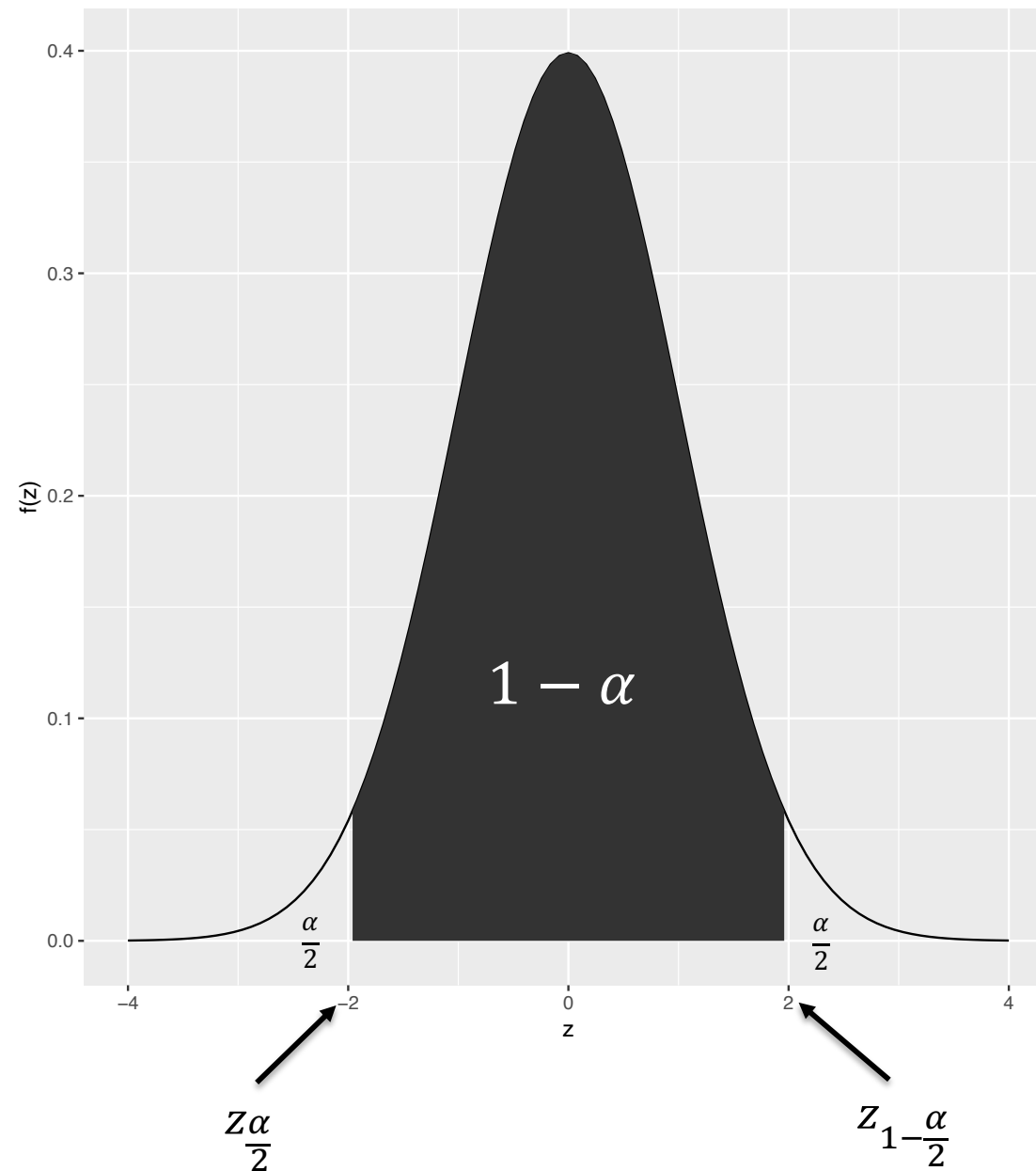
- Der Standardmessfehler ist ein Maß für die Genauigkeit der Schätzung des latenten Variablenwerts von Personen
- Es lässt sich argumentieren, dass der Standardmessfehler ein nützlicheres und auch intuitiveres Maß für die Genauigkeit eines Tests ist als die Reliabilität des Summenwerts (siehe approximative Konfidenzintervalle; Sitzung #13)
- Die Berechnung bzw. Schätzung des Standardmessfehlers unterscheidet sich je nach testtheoretischem Modell

- Mithilfe der Schätzfunktion $\hat{\theta}_{Person}$ und ihrer Standardabweichung, dem Standardmessfehler $SE(\hat{\theta}_{Person})$, können wir ein **zweiseitiges Konfidenzintervall** für den Parameter θ_{Person} konstruieren:

$$I_{Person} = \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot SE(\hat{\theta}_{Person}) \right]$$

- Diese allgemeine Form des Konfidenzintervalls ist für alle Modelle gleich
- Die Modelle unterscheiden sich jedoch darin, welche Schätzfunktion $\hat{\theta}_{Person}$ verwendet wird und welchen Standardmessfehler $SE(\hat{\theta}_{Person})$ diese hat
- Damit das Konfidenzintervall das gewünschte Konfidenzniveau aufweist, müssen wir die Annahme treffen, dass die Itemantworten $X_{iPerson}$ der festen Person unabhängig und normalverteilt sind

WH aus Statistik I: Quantile der Standardnormalverteilung I





- Wir können mithilfe der Verteilungsfunktion F der Standardnormalverteilung diejenigen Werte $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bestimmen, für die jeweils $F(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$ und $F(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ gilt
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ist das $\frac{\alpha}{2}$ - Quantil und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ - Quantil der Standardnormalverteilung
- Es gilt also für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z :

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- Das heißt: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sind diejenigen Werte, zwischen denen die Fläche unter der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung $1 - \alpha$ ist
- Bemerkung: Aufgrund der Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung um Null ist $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$. Es reicht also wenn wir eines der beiden Quantile berechnen, in unseren Formeln immer $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

2.1. Paralleles Modell

- Eine feste Person antwortet auf k Items, von denen wir wissen, dass Sie einem parallelen Modell folgen
- Die Itemantworten der Person können als Zufallsvariablen $X_{iPerson}$ aufgefasst werden
- Im parallelen Modell gilt auf der Ebene der festen Person:

$$\begin{aligned}X_{iPerson} &= \theta_{Person} + \varepsilon_{iPerson} \\VAR(\varepsilon_{iPerson}) &= VAR(\varepsilon_{jPerson}) \\COV(\varepsilon_{iPerson}, \varepsilon_{jPerson}) &= 0\end{aligned}$$

- Gesucht wird ein Konfidenzintervall für den Parameter θ_{Person}

- Es kann gezeigt werden, dass sich als optimale und damit erwartungstreue und effiziente Schätzfunktion für θ_{Person} im parallelen Modell folgende Schätzfunktion ergibt:

$$\hat{\theta}_{Person} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{iPerson}$$

- Im parallelen Modell kann der Wert der Person auf der latenten Variable durch den Mittelwert ihrer Itemantworten geschätzt werden

- Als Standardmessfehler ergibt sich im parallelen Modell dann folgende Schätzfunktion:

$$SE(\hat{\theta}_{Person}) = \sqrt{\frac{VAR(\varepsilon_i)}{k}}$$

- Zur Schätzung des Standardmessfehlers benötigen wir also einen Schätzwert für die Varianz $VAR(\varepsilon_i)$ der Fehlervariable ε_i eines beliebigen Items i
- Diesen können wir aus der Normstichprobe berechnen (siehe Sitzung #7)

- Als zweiseitiges Konfidenzintervall für θ_{Person} ergibt sich somit im parallelen Modell:

$$I_{Person} = \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot SE(\hat{\theta}_{Person}) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{iPerson} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{VAR(\varepsilon_i)}{k}} \right]$$

- Vier parallele Items ($k = 4$)
- Schätzwert $var(\varepsilon_i)$ für $VAR(\varepsilon_i)$ aus der Normstichprobe:

Variances:

	Estimate	Std.Err	z-value	p(> z)
.item1	0.039	0.001	38.730	0.000
.item2	0.039	0.001	38.730	0.000
.item3	0.039	0.001	38.730	0.000
.item4	0.039	0.001	38.730	0.000
f1	0.997	0.045	22.144	0.000

- Damit können wir den Schätzwert für den Standardmessfehler $SE(\hat{\theta}_{Person})$ berechnen:

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}_{Person}) = \sqrt{\frac{var(\varepsilon_i)}{k}} = \sqrt{\frac{0.039}{4}} \approx 0.10$$

- Die Person hat auf den vier Items wie folgt angekreuzt:

$$x_{1Person} = 2$$

$$x_{2Person} = 1$$

$$x_{3Person} = 2$$

$$x_{4Person} = 3$$

- Der Schätzwert für ihren Wert auf der latenten Variable ist somit:

$$\hat{\theta}_{Person} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{iPerson} = \frac{2 + 1 + 2 + 3}{4} = 2$$

- Als zweiseitiges 95-Prozent Konfidenzintervall ($z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$) für ihren latenten Variablenwert θ_{Person} ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_{Person} &= \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{SE}(\hat{\theta}_{Person}) \right] \\ &= [2 \pm 1.96 \cdot 0.1] \\ &= [1.804; 2.196] \end{aligned}$$

- Plausible Werte für den latenten Variablenwert θ_{Person} liegen also zwischen 1.804 und 2.196
- Wie wir diese Werte interpretieren können, werden wir nächste Woche besprechen

2.2. Essentiell paralleles Modell

- Eine feste Person antwortet auf k Items, von denen wir wissen, dass Sie einem essentiell parallelen Modell folgen
- Die Itemantworten der Person können als Zufallsvariablen $X_{iPerson}$ aufgefasst werden
- Im essentiell parallelen Modell gilt auf der Ebene der festen Person:

$$\begin{aligned}X_{iPerson} &= \sigma_i + \theta_{Person} + \varepsilon_{iPerson} \\VAR(\varepsilon_{iPerson}) &= VAR(\varepsilon_{jPerson}) \\COV(\varepsilon_{iPerson}, \varepsilon_{jPerson}) &= 0\end{aligned}$$

- Gesucht wird ein Konfidenzintervall für den Parameter θ_{Person}

- Als erwartungstreue und effiziente Schätzfunktion für θ_{Person} ergibt sich im essentiell parallelen Modell folgende Schätzfunktion:

$$\hat{\theta}_{Person} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{iPerson} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sigma_i$$

- Im essentiell parallelen Modell kann der Wert der Person auf der latenten Variable also durch den um den Term $-\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sigma_i$ verschobenen Mittelwert ihrer Itemantworten geschätzt werden
- Die Verschiebung um $-\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sigma_i$ sorgt dafür, dass die unterschiedlichen Schwierigkeiten der Items bei der Schätzung berücksichtigt werden
- Schätzwerte für die Schwierigkeitsparameter σ_i haben wir aus der Normstichprobe (siehe Sitzung #07)

- Als Standardmessfehler ergibt sich im essentiell parallelen Modell genau wie im parallelen Modell:

$$SE(\hat{\theta}_{Person}) = \sqrt{\frac{VAR(\varepsilon_i)}{k}}$$

- Zur Schätzung des Standardmessfehlers benötigen wir also einen Schätzwert für die Varianz $VAR(\varepsilon_i)$ der Fehlervariable ε_i eines beliebigen Items i
- Diesen können wir aus der Normstichprobe berechnen (siehe Sitzung #7)

- Als zweiseitiges Konfidenzintervall für θ_{Person} ergibt sich somit im essentiell parallelen Modell:

$$I_{Person} = \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot SE(\hat{\theta}_{Person}) \right]$$
$$= \left[\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{iPerson} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sigma_i \right) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{VAR(\varepsilon_i)}{k}} \right]$$

- Vier essentiell parallele Items ($k = 4$)
- Schätzwert $var(\varepsilon_i)$ und σ_i aus der Normstichprobe:

Intercepts:

	Estimate	Std.Err	z-value	p(> z)
.item1	5.039	0.032	159.411	0.000
.item2	2.037	0.032	64.431	0.000
.item3	3.032	0.032	95.904	0.000
.item4	2.552	0.032	80.716	0.000
f1	10.000			

Variances:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)
.item1	0.041	0.001	38.730	0.000
.item2	0.041	0.001	38.730	0.000
.item3	0.041	0.001	38.730	0.000
.item4	0.041	0.001	38.730	0.000
f1	0.959	0.043	22.125	0.000

- Damit können wir den Schätzwert für den Standardmessfehler $SE(\hat{\theta}_{Person})$ berechnen:

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}_{Person}) = \sqrt{\frac{var(\varepsilon_i)}{k}} = \sqrt{\frac{0.041}{4}} \approx 0.10$$

- Die Person hat auf den vier Items wie folgt angekreuzt:

$$x_{1Person} = 4$$

$$x_{2Person} = 3$$

$$x_{3Person} = 5$$

$$x_{4Person} = 4$$

- Der Schätzwert für ihren Wert auf der latenten Variable ist somit:

$$\hat{\theta}_{Person} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{iPerson} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sigma_i$$

$$= \frac{4 + 3 + 5 + 4}{4} - \frac{5.039 + 2.037 + 3.032 + 2.552}{4} = 0.835$$

- Als zweiseitiges 95-Prozent Konfidenzintervall für ihren latenten Variablenwert θ_{Person} ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_{Person} &= \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{SE}(\hat{\theta}_{Person}) \right] \\ &= [0.835 \pm 1.96 \cdot 0.1] \\ &= [0.639; 1.031] \end{aligned}$$

- Plausible Werte für den latenten Variablenwert θ_{Person} liegen also zwischen 0.639 und 1.031

2.3. τ –äquivalentes Modell

- Eine feste Person antwortet auf k Items, von denen wir wissen, dass Sie einem τ -äquivalenten Modell folgen
- Die Itemantworten der Person können als Zufallsvariablen $X_{iPerson}$ aufgefasst werden
- Im τ -äquivalenten Modell gilt auf der Ebene der festen Person:

$$X_{iPerson} = \theta_{Person} + \varepsilon_{iPerson}$$
$$COV(\varepsilon_{iPerson}, \varepsilon_{jPerson}) = 0$$

- Gesucht wird ein Konfidenzintervall für den Parameter θ_{Person}

- Als erwartungstreue und effiziente Schätzfunktion für θ_{Person} ergibt sich im τ -äquivalenten Modell folgende Schätzfunktion:

$$\hat{\theta}_{Person} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{X_{iPerson}}{VAR(\varepsilon_i)}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{VAR(\varepsilon_i)}}$$

- Der Zähler der Schätzfunktion ist eine gewichtete Summe der Itemantworten der Person: Je größer die Fehlervarianz eines Items, desto weniger geht die Itemantwort der Person auf diesem Item in die Schätzung mit ein, denn je größer die Fehlervarianz $VAR(\varepsilon_i)$, desto kleiner der Bruch $\frac{X_{iPerson}}{VAR(\varepsilon_i)}$
- Die Form des Nenners hat mathematische Gründe: Sie sorgt dafür, dass die Schätzfunktion erwartungstreu ist (Beweis aufwändig)
- Schätzwerte für $VAR(\varepsilon_i)$ erhalten wir aus der Normstichprobe

- Als Standardmessfehler ergibt sich im τ -äquivalenten Modell:

$$SE(\hat{\theta}_{person}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{VAR(\varepsilon_i)}}}$$

- Schätzwerte für die Varianzen $VAR(\varepsilon_i)$ der Fehlervariablen ε_i erhalten wir aus der Normstichprobe

- Als zweiseitiges Konfidenzintervall für θ_{Person} ergibt sich somit im τ -äquivalenten Modell:

$$I_{Person} = \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot SE(\hat{\theta}_{Person}) \right]$$
$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^k \frac{X_{iPerson}}{VAR(\varepsilon_i)}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{VAR(\varepsilon_i)}} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{VAR(\varepsilon_i)}}} \right]$$

- Vier τ -äquivalente Items ($k = 4$)
- Schätzwert $var(\varepsilon_i)$ aus der Normstichprobe:

Variances:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)
.item1	0.036	0.003	12.645	0.000
.item2	0.668	0.030	22.087	0.000
.item3	0.152	0.007	20.916	0.000
.item4	0.011	0.002	4.556	0.000
f1	1.015	0.046	22.184	0.000

- Damit können wir den Schätzwert für den Standardmessfehler $SE(\hat{\theta}_{Person})$ berechnen:

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}_{Person}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{var(\varepsilon_i)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{0.036} + \frac{1}{0.668} + \frac{1}{0.152} + \frac{1}{0.011}}} \approx 0.09$$

- Die Person hat auf den vier Items wie folgt angekreuzt:

$$x_{1Person} = 2$$

$$x_{2Person} = 1$$

$$x_{3Person} = 2$$

$$x_{4Person} = 3$$

- Der Schätzwert für ihren Wert auf der latenten Variable ist somit:

$$\hat{\theta}_{Person} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{x_{iPerson}}{var(\varepsilon_i)}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{var(\varepsilon_i)}} = \frac{\frac{2}{0.036} + \frac{1}{0.668} + \frac{2}{0.152} + \frac{3}{0.011}}{\frac{1}{0.036} + \frac{1}{0.668} + \frac{1}{0.152} + \frac{1}{0.011}} \approx 2.71$$

- Als zweiseitiges 95 Prozent Konfidenzintervall für ihren latenten Variablenwert θ_{Person} ergibt sich:

$$I_{Person} = \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{SE}(\hat{\theta}_{Person}) \right]$$

$$= [2.71 \pm 1.96 \cdot 0.09]$$

$$= [2.534; 2.886]$$

- Die plausiblen Werte für den latenten Variablenwert θ_{Person} liegen also zwischen 2.534 und 2.886

2.4. essentiell τ – äquivalentes Modell

- Eine feste Person antwortet auf k Items, von denen wir wissen, dass Sie einem essentiell τ -äquivalenten Modell folgen
- Die Itemantworten der Person können als Zufallsvariablen $X_{iPerson}$ aufgefasst werden
- Im essentiell τ -äquivalenten Modell gilt auf der Ebene der festen Person:

$$X_{iPerson} = \sigma_i + \theta_{Person} + \varepsilon_{iPerson}$$
$$COV(\varepsilon_{iPerson}, \varepsilon_{jPerson}) = 0$$

- Gesucht wird ein Konfidenzintervall für den Parameter θ_{Person}

- Als erwartungstreue und effiziente Schätzfunktion für θ_{Person} ergibt sich im essentiell τ -äquivalenten Modell:

$$\hat{\theta}_{Person} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{X_{iPerson} - \sigma_i}{VAR(\varepsilon_i)}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{VAR(\varepsilon_i)}}$$

- Der Zähler der Schätzfunktion ist wieder eine gewichtete Summe der Itemantworten der Person, wobei hier zudem die unterschiedlichen Schwierigkeiten der Items berücksichtigt werden
- Der Nenner sorgt wieder dafür, dass die Schätzfunktion erwartungstreu ist
- Schätzwerte für σ_i und $VAR(\varepsilon_i)$ erhalten wir aus der Normstichprobe

- Als Standardmessfehler ergibt sich im essentiell τ -äquivalenten Modell genau wie im τ -äquivalenten Modell:

$$SE(\hat{\theta}_{person}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{VAR(\varepsilon_i)}}}$$

- Schätzwerte für die Varianzen $VAR(\varepsilon_i)$ der Fehlervariablen ε_i aller Items erhalten wir aus der Normstichprobe

- Als zweiseitiges Konfidenzintervall für θ_{Person} ergibt sich somit im essentiell τ -äquivalenten Modell:

$$I_{Person} = \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot SE(\hat{\theta}_{Person}) \right]$$
$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^k \frac{X_{iPerson} - \sigma_i}{VAR(\varepsilon_i)}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{VAR(\varepsilon_i)}} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{VAR(\varepsilon_i)}}} \right]$$

- Vier essentiell τ -äquivalente Items ($k = 4$)
- Schätzwert $var(\varepsilon_i)$ und σ_i aus der Normstichprobe:

Intercepts:

	Estimate	Std.Err	z-value	p(> z)
.item1	0.938	0.033	28.120	0.000
.item2	1.942	0.040	49.024	0.000
.item3	2.433	0.046	53.430	0.000
.item4	3.923	0.034	115.167	0.000
f1	0.000			

Variances:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z)
.item1	0.040	0.006	6.495	0.000
.item2	0.496	0.023	21.149	0.000
.item3	1.000	0.046	21.784	0.000
.item4	0.087	0.007	12.245	0.000
f1	1.073	0.049	21.825	0.000

- Damit können wir den Schätzwert für den Standardmessfehler $SE(\hat{\theta}_{person})$ berechnen:

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}_{person}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{var(\varepsilon_i)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{0.040} + \frac{1}{0.496} + \frac{1}{1.000} + \frac{1}{0.087}}} \approx 0.16$$

- Die Person hat auf den vier Items wie folgt angekreuzt:

$$x_{1Person} = 4$$

$$x_{2Person} = 3$$

$$x_{3Person} = 5$$

$$x_{4Person} = 4$$

- Der Schätzwert für ihren Wert auf der latenten Variable ist somit:

$$\hat{\theta}_{Person} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{x_{iPerson} - \sigma_i}{var(\varepsilon_i)}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{var(\varepsilon_i)}} = \frac{\frac{4 - 0.938}{0.040} + \frac{3 - 1.942}{0.496} + \frac{5 - 2.433}{1.000} + \frac{4 - 3.923}{0.087}}{\frac{1}{0.040} + \frac{1}{0.496} + \frac{1}{1.000} + \frac{1}{0.087}} \approx 2.08$$

- Als zweiseitiges 95 Prozent Konfidenzintervall für ihren latenten Variablenwert θ_{Person} ergibt sich

$$I_{Person} = \left[\hat{\theta}_{Person} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{SE}(\hat{\theta}_{Person}) \right]$$

$$= [2.08 \pm 1.96 \cdot 0.16] =$$

$$= [1.767; 2.394]$$

- Die plausiblen Werte für den latenten Variablenwert θ_{Person} liegen also zwischen 1.767 und 2.394

- *Ausblick:* In der nächsten Vorlesung machen wir weiter mit der Einzelfalldiagnostik
- *Aber zuerst:*
 - **Gibt es offene Fragen zur heutigen Vorlesung?**
 - Zur Vertiefung:
 - Übungsblatt 9 zur Einzelfalldiagnostik folgt nächste Woche
 - Bühner (2021, Kapitel 8, S. 654-666)