

Lineare Gemischte Modelle (3)



We are happy to share our materials openly:

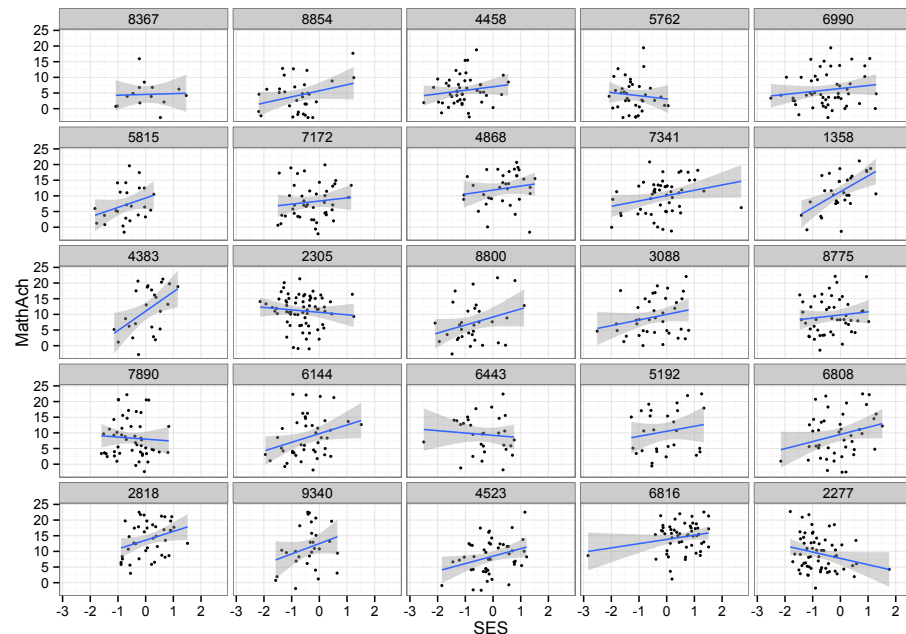
The content of these Open Educational Resources by Lehrstuhl für Psychologische Methodenlehre und Diagnostik, Ludwig-Maximilians-Universität München is licensed under CC BY-SA 4.0. The CC Attribution-ShareAlike 4.0 International license means that you can reuse or transform the content of our materials for any purpose as long as you cite our original materials and share your derivatives under the same license.

Gleichungen auf Level 1 und 2

- Die Varianz der Regressionsparameter β_{0j} und β_{1j} wird als Funktion von Level-2-Parametern modelliert:

- Level-1-Gleichung:
$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

- Level-2-Gleichungen:
$$\begin{aligned}\beta_{0j} &= \gamma_{00} + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + u_{1j}\end{aligned}$$



Residuen auf Level 1 und 2

- Die Varianz der Regressionsparameter β_{0j} und β_{1j} wird als Funktion von Level-2-Parametern modelliert:

- Level-1-Gleichung:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

r für Residuum auf Level 1

- Level-2-Gleichungen:

Gesamtintercept

$$\begin{aligned}\beta_{0j} &= \gamma_{00} + u_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + u_{1j}\end{aligned}$$

Gesamtslope

u für Residuum auf
Gruppenebene (Level 2):
Gruppenspezifische
Abweichung vom
Gesamtintercept/-slope

- Die Varianz der Regressionsparameter β_{0j} und β_{1j} wird als Funktion von Level-2-Parametern modelliert:

- Level-1-Gleichung:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

Varianz der Residuen auf Level 1: σ^2

- Level-2-Gleichungen:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

Varianz der gruppenspezifischen Interceptabweichungen: τ_{00}

Kovarianz der Gruppenintercepts mit den Gruppenslopes: τ_{01}

Varianz der gruppenspezifischen Slopeabweichungen: τ_{11}

Wdh: Das Random-Intercept-Modell

Random-Intercept-Modell ohne Prädiktor (= random effects ANOVA)

```
library(lme4)
lmer(MathAch ~ 1 + (1|School), data=HSB)
```

Kriterium

Gesamt-
intercept

Random
intercept ...

für jede
L2-Einheit

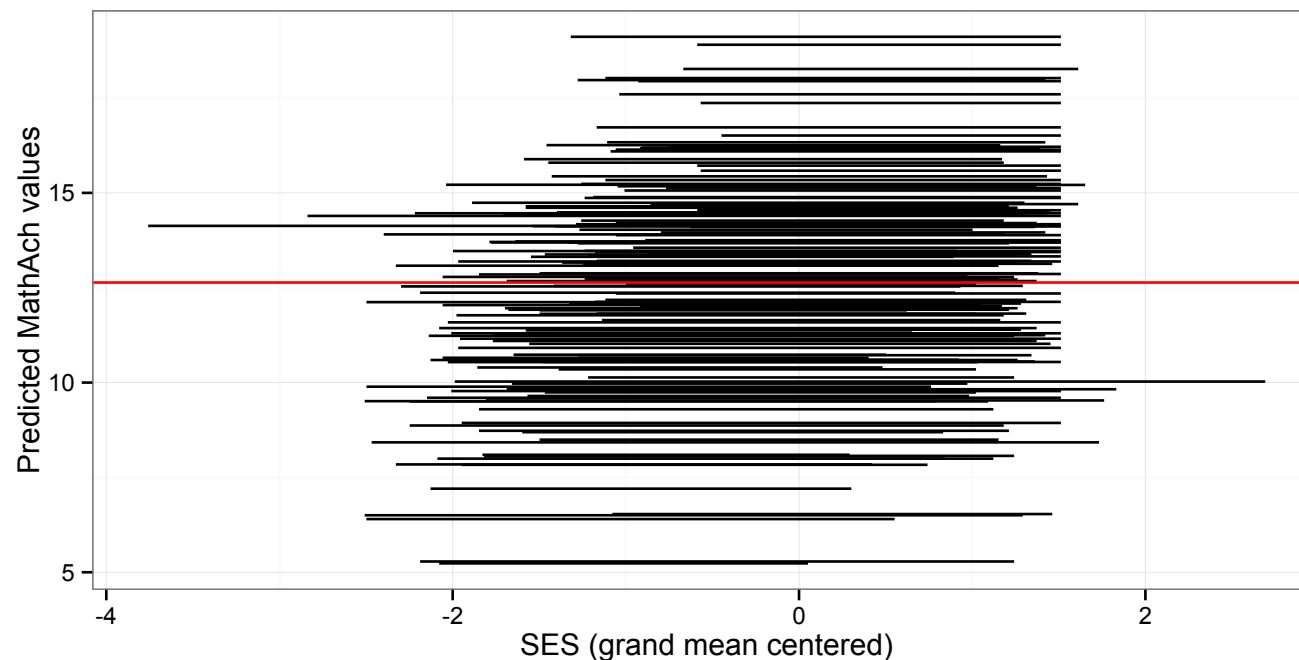
Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
School	(Intercept)	8.614	2.935
Residual		39.148	6.257

Number of obs: 7185, groups: School, 160

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value
(Intercept)	12.6370	0.2444	156.6500	51.71



Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
School	(Intercept)	8.614	2.935
Residual		39.148	6.257

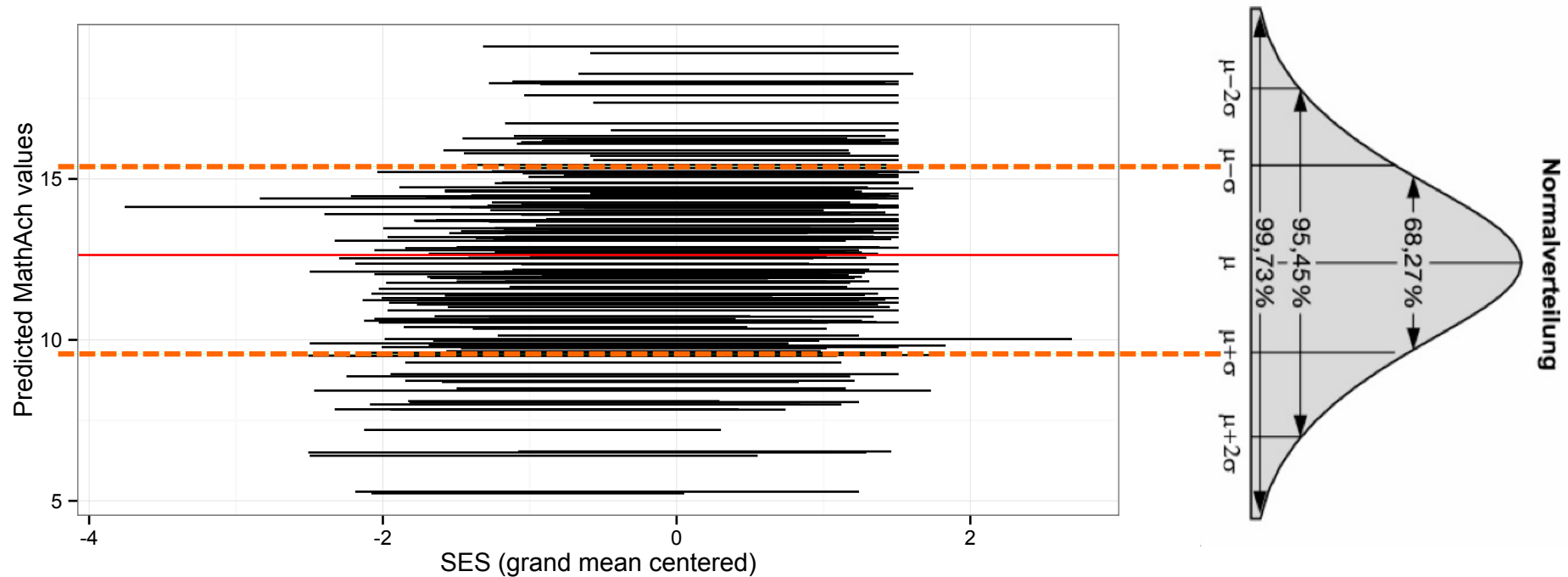
Number of obs: 7185, groups: School 160

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value
(Intercept)	12.6370	0.2444	156.6500	51.71

- τ_{00} = Varianz der Gruppenintercepts; Annahme: Normalverteilung der Intercepts
 - 68% aller Werte einer Normalverteilung liegen zwischen -1 SD und +1 SD
 - SD = $\sqrt{\text{Varianz}}$ → siehe Std. Dev. im Output
 - d.h., 68% aller Gruppenintercepts liegen zwischen $12.637 - 2.935 = \mathbf{9.702}$ und $12.637 + 2.935 = \mathbf{15.572}$

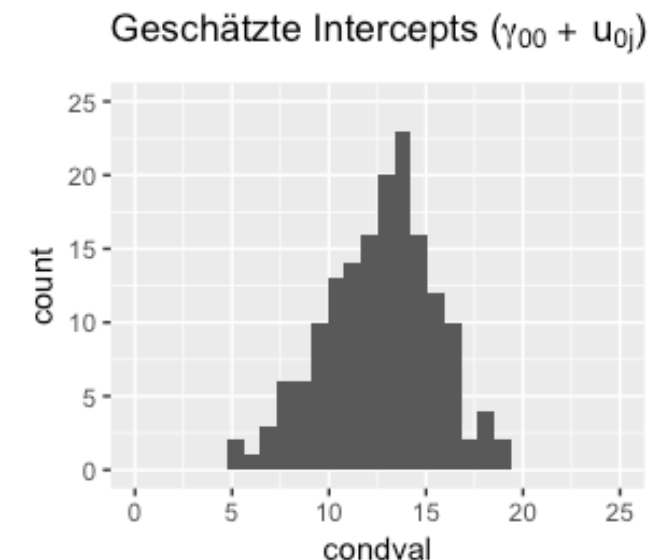
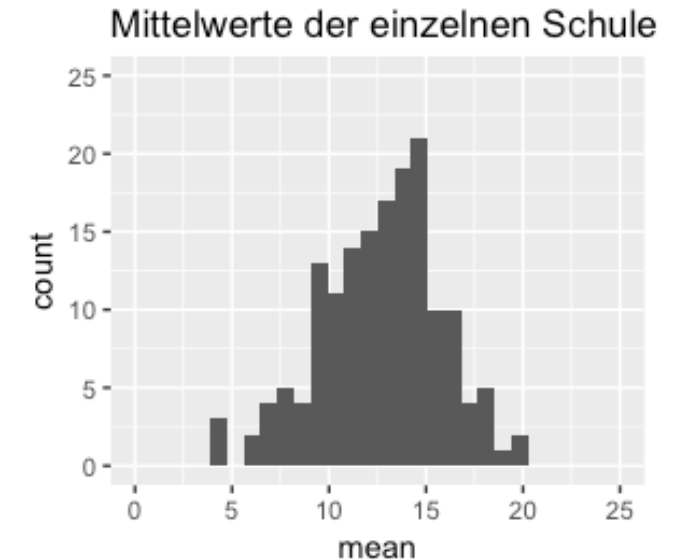
Interpretation der random variance



- τ_{00} = Varianz der Gruppenintercepts; Annahme: Normalverteilung der Intercepts
 - 68% aller Werte einer Normalverteilung liegen zwischen -1 SD und +1 SD
 - $SD = \sqrt{\text{Varianz}} \rightarrow$ siehe Std. Dev. im Output
 - d.h., 68% aller Gruppenintercepts liegen zwischen $12.637 - 2.935 = \mathbf{9.702}$ und $12.637 + 2.935 = \mathbf{15.572}$

Random-Intercept-Modell ohne Prädiktor: Was sind die Intercepts?

- Die Intercepts werden unter der **Annahme der Normalverteilung** geschätzt.
- Gruppen die
 - a. extremere Ausprägungen haben (im Mittel weit vom Gesamtmittel entfernt) und/oder
 - b. nur wenige Beobachtungen enthalten
- werden hin zur Mitte der Verteilung „gezogen“ und in die angenommene Verteilung „eingepasst“.
- (...weil in der Normalverteilung extreme Werte unwahrscheinlicher sind und wir Werten die auf weniger Beobachtungen beruhen weniger vertrauen.)
- Diesen Effekt nennt man **Shrinkage**.
- Das tritt auch bei allen anderen Random Effects (Intercepts oder Slopes) auf.



Das Random-Intercept, fixed-slope-Modell

Das Random-Intercept, fixed-slope-Modell

- Jetzt wird ein Prädiktor auf Level 1 hinzugefügt:
Kann man anhand des SES einer Schüler*in die Mathe-Leistung vorhersagen?
- Level-2-Gruppierungsstruktur:
Schüler*innen geschachtelt in Schulen
- Random intercept: Die schulspezifischen Intercepts dürfen vom Gesamtintercept abweichen
- Fixed slope: Der Regressionkoeffizient für den Prädiktor „SES“ ist fest, d.h., es gibt genau einen gemeinsamen Slope für jede Schule.

Das Random-Intercept, fixed-slope-Modell

- Level-1-Gleichung:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

- Level-2-Gleichungen:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \cancel{u_{1j}}$$

Kein Zufallsterm u_1 für
den Slope: Slope ist
konstant (d.h., fixed)
über alle Gruppen

- Kombinierte Gleichung:

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}x_{ij} + u_{0j} + r_{ij}$$

- Ein Datenpunkt wird vorhergesagt durch das **Gesamtintercept**, die **gruppenspezifische Abweichung vom Gesamtintercept**, und das **individuelle Residuum relativ zum vorgesagten Wert**, und den **Level-1 Prädiktor „SES“**
- $MathAch_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}SES_{ij} + u_{0j} + r_{ij}$

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10} * x_{ij} + u_{0j} + r_{ij}$$

```
library(lme4)
lmer(MathAch ~ 1 + SES + (1|School), data=HSB)
```

Kriterium

Gesamt-
intercept

Random
intercept ...

für jede
L2-Einheit

L1-
Prädiktor

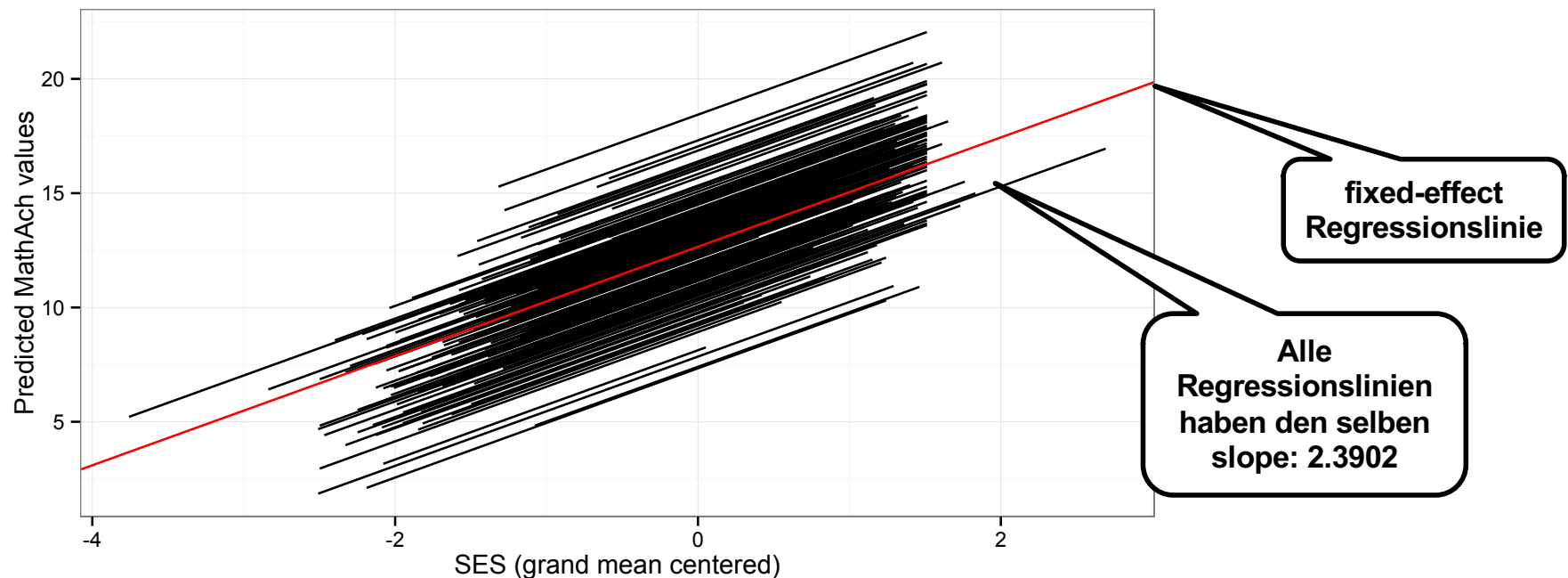
Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
School	(Intercept)	4.768	2.184
Residual		37.034	6.086

Number of obs: 7185, groups: School, 160

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value
(Intercept)	12.6575	0.1880	148.0000	67.33
SES	2.3902	0.1057	6838.0000	22.61



Vergleiche: Modell ohne Prädiktor (nur random intercept) und Modell mit Prädiktor

MathAch ~ 1 + (1|School)

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
School	(Intercept)	8.614	2.935
	Residual	39.148	6.257

Number of obs: 7185, groups: School, 160

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value
(Intercept)	12.6370	0.2444	156.6500	51.71

Nicht erklärte
Residualvarianz

$$(8.614 - 4.768) / 8.614 = 44.6\%$$

$$(39.148 - 37.034) / 39.148 = 5.4\%$$

MathAch ~ 1 + SES + (1|School)

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
School	(Intercept)	4.768	2.184
	Residual	37.034	6.086

Number of obs: 7185, groups: School, 160

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value
(Intercept)	12.6575	0.1880	148.0000	67.33
SES	2.3902	0.1057	6838.0000	22.61

Nicht erklärte
Residualvarianz

→ die unsystematische Varianz der
Intercepts verringert sich durch den
Prädiktor SES um 44.6 %.

→ die unsystematische Varianz der
Residuen verringert sich durch den
Prädiktor SES um 5.4 %.

Das Random-Intercept, random-slope-Modell

Das Random-Intercept, random-slope-Modell

- Kann man anhand des SES einer Schüler*in die Mathe-Leistung vorhersagen?
- Level-2-Gruppierungsstruktur:
Schüler*innen geschachtelt in Schulen
- Random Intercept: Die schulspezifischen Intercepts dürfen vom Gesamtintercept abweichen
- **Random Slope: Ist es plausibel, dass alle Schulen exakt den gleichen Slope haben? Nicht unbedingt.**
Der Regressionkoeffizient für den Prädiktor „SES“ darf nun zwischen den Schulen variieren.

Das Random-Intercept, random-slope-Modell

- Level-1-Gleichung:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

- Level-2-Gleichungen:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

Jetzt darf der Slope auch
variieren

- Kombinierte Gleichung:

$$y_{ij} = (\gamma_{00} + u_{0j}) + (\gamma_{10} + u_{1j})x_{ij} + r_{ij}$$

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}x_{ij} + u_{0j} + u_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

- Ein Datenpunkt wird vorhergesagt durch das Gesamtintercept, die gruppenspezifische Abweichung vom Gesamtintercept, den Level-1 Prädiktor „SES“ (der pro Gruppe einen eigenen Slope haben darf), und das individuelle Residuum relativ zum vorhergesagten Wert

- $MathAch_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}SES_{ij} + u_{0j} + u_{1j}SES_{ij} + r_{ij}$

$$MathAch_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}SES_{ij} + u_{0j} + u_{1j}SES_{ij} + r_{ij}$$

MathAch ~ 1 + SES + (1 + **SES** | School)

Kriterium

Gesamt-
intercept

Random
intercept

Random
slope

L1-
Prädiktor

Random effects:

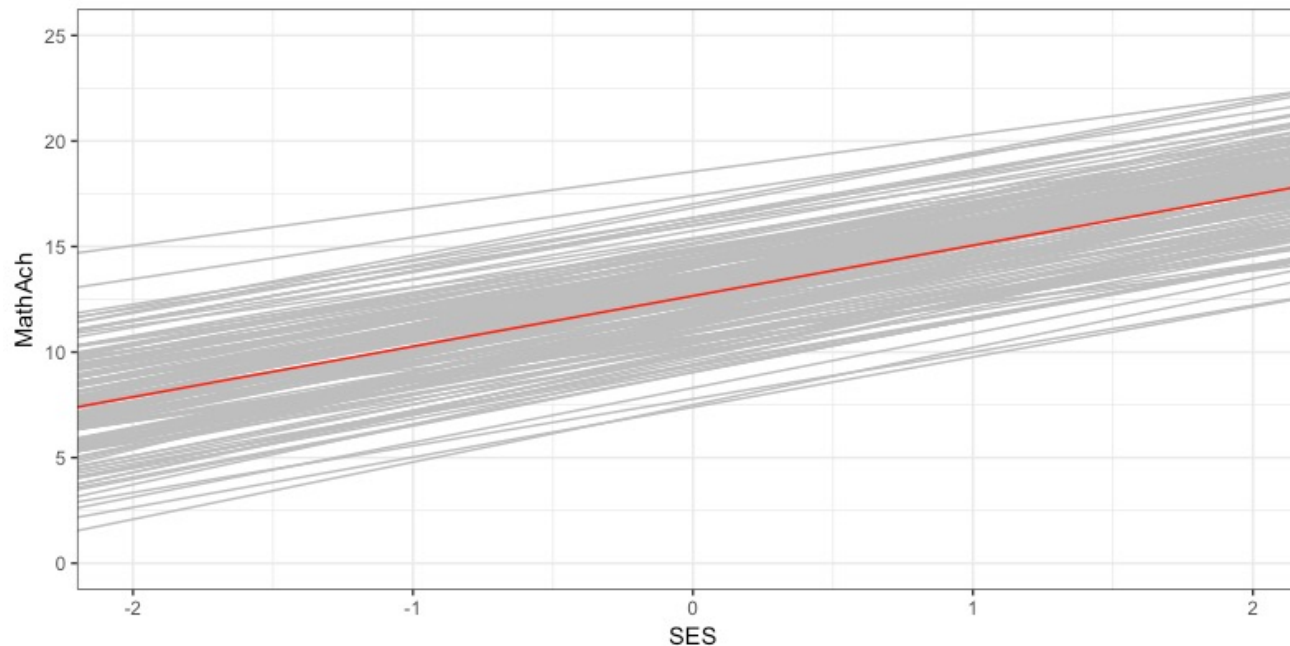
Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
School	(Intercept)	4.1286	2.1974	
	SES	0.4129	0.6426	-0.11
	Residual	36.8302	6.0688	
Number of obs: 7185, groups: School, 160				

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value
(Intercept)	12.6650	0.1898	145.5500	66.71
SES	2.3938	0.1181	157.5300	20.27

standardisiertes
 τ_{01}^*

σ^2



*Anmerkung: τ_{01} ist die Kovarianz. Im Output wird aber die *Korrelation* der random intercepts und random slopes angezeigt (Korrelation = standardisierte Kovarianz)

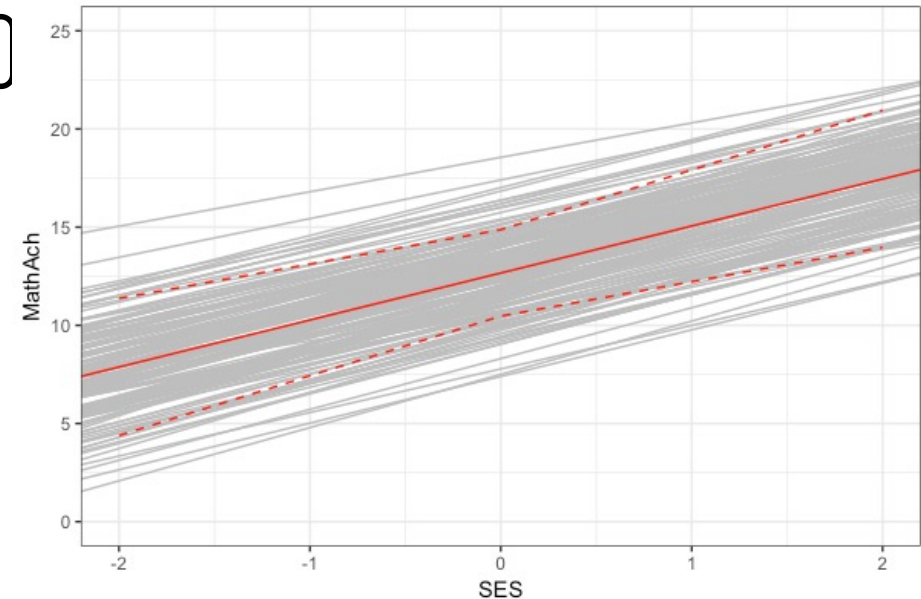
Interpretation der random variance

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
School	(Intercept)	4.8286	2.1974	
	SES	0.4129	0.6426	-0.11
Residual		36.8302	6.0688	
Number of obs: 7185, groups: School, 160				

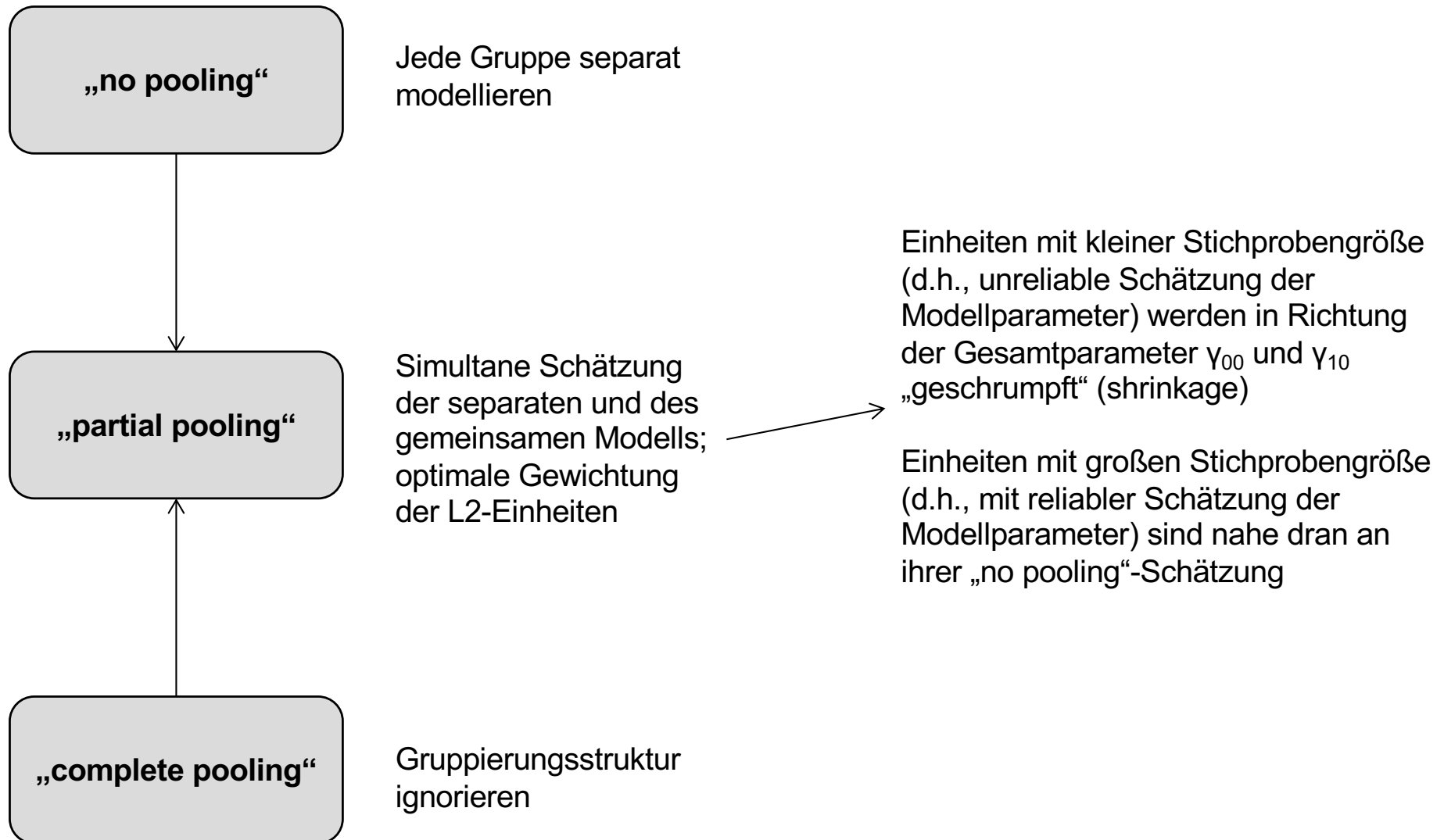
Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value
(Intercept)	12.6650	0.1898	145.5500	66.71
SES	2.3938	0.1181	157.5300	20.27

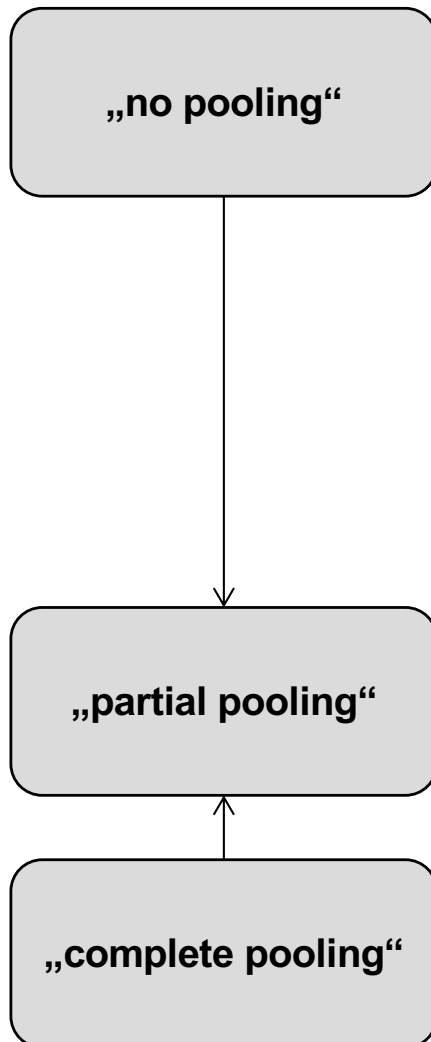


- τ_{00} = Varianz der Gruppenintercepts; Annahme: Normalverteilung der Intercepts
 - 68% aller Gruppenintercepts liegen zwischen $12.67 - 2.20 = 10.47$ und $12.67 + 2.20 = 14.87$
- τ_{11} = Varianz der Gruppenslopes; Annahme: Normalverteilung der Slopes
 - 68% aller Gruppenslopes liegen zwischen $2.39 - 0.64 = 1.75$ und $2.39 + 0.64 = 3.04$
 - D.h., in typischen Gruppen steigt die vorhergesagte Matheleistung zwischen 1.75 und 3.04 Einheiten, wenn der SES um 1 Punkt höher ist.

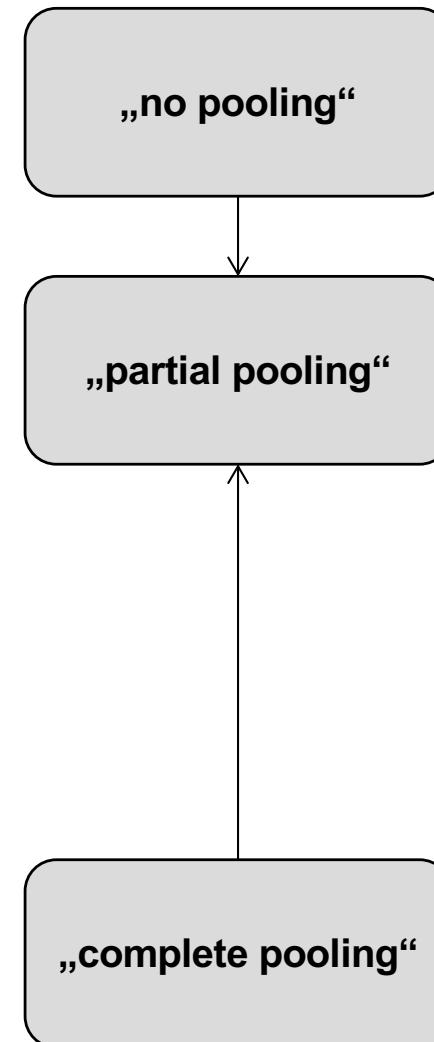
LMM = partial pooling



ICC $\rightarrow$ 0



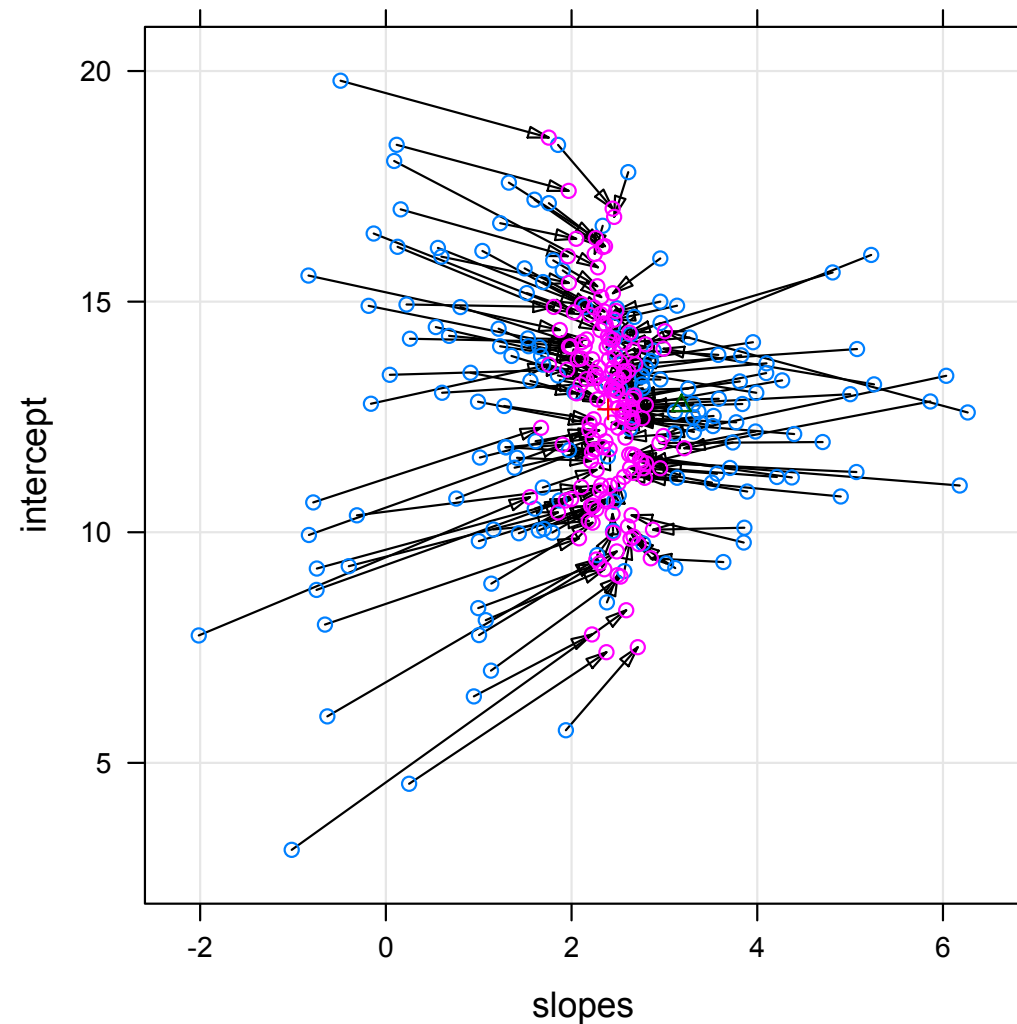
ICC $\rightarrow$ 1



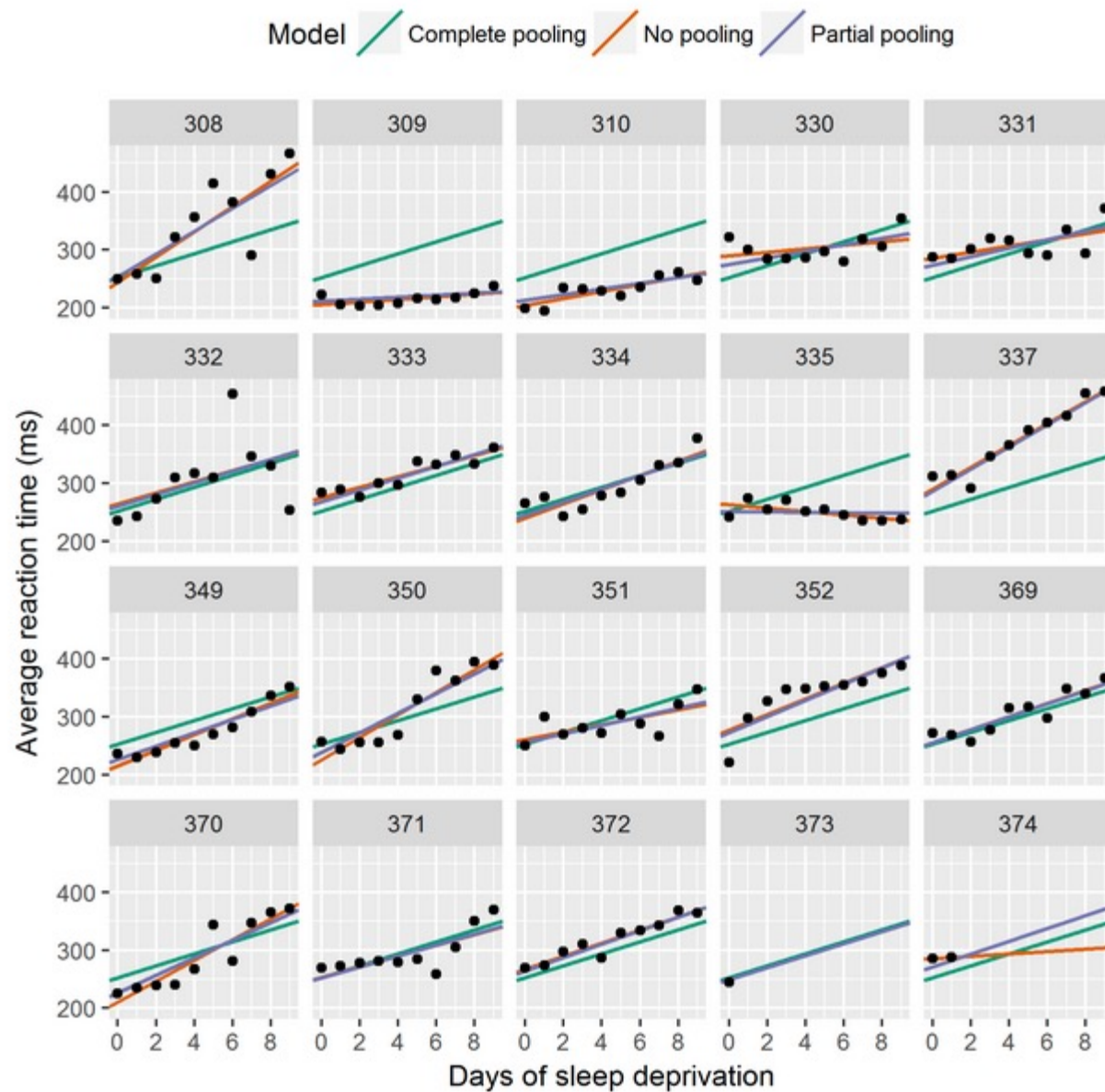
Shrinkage

Comparison of regression coefficients

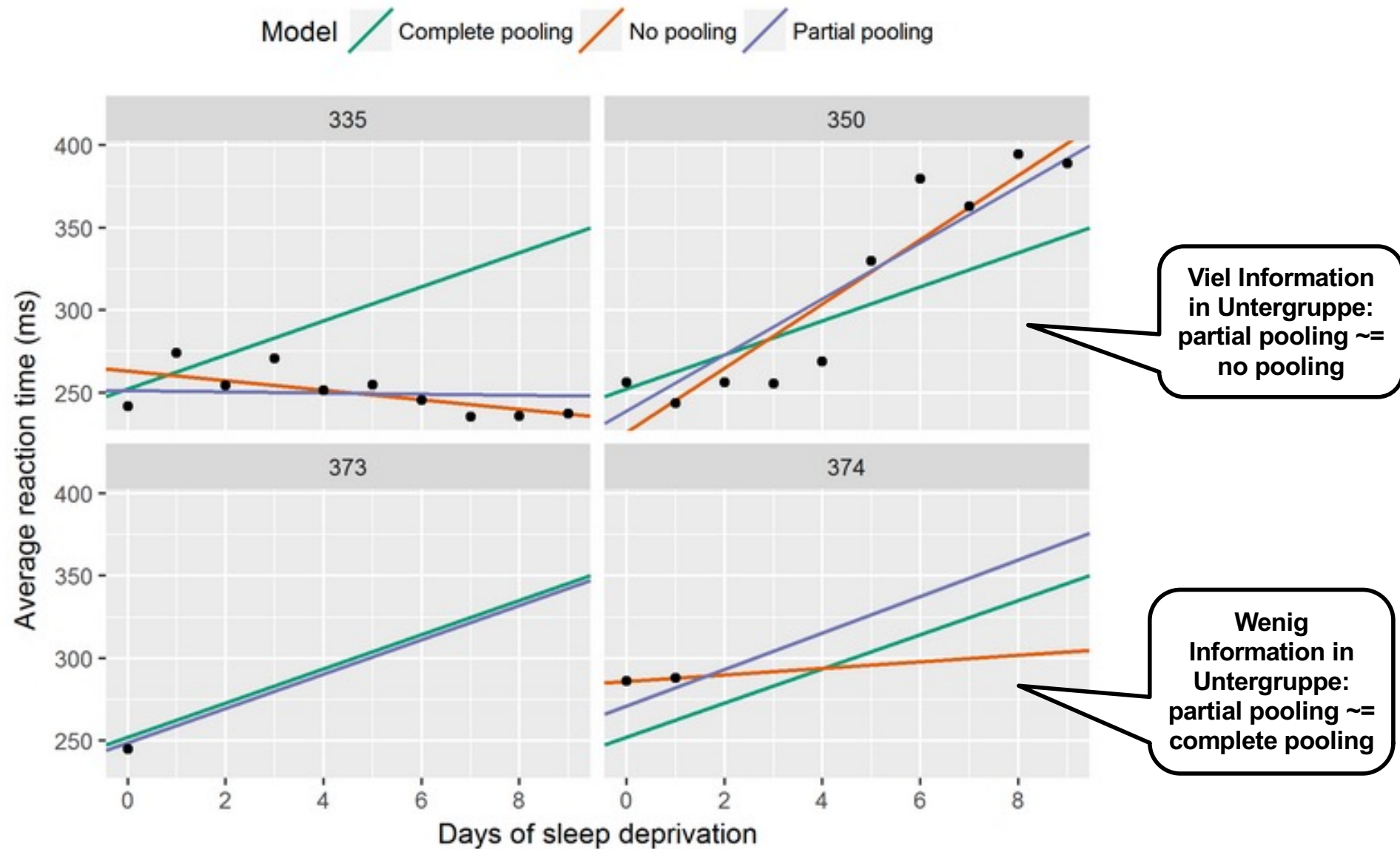
Within-group (no pooling) ○ complete pooling △
Mixed model ○ fixed effect +



Complete vs. partial pooling



Complete vs. partial pooling



Ein „vollständiges“ Multilevel-Modell: Level-2-Prädiktoren

- Kann man die Variabilität in Intercepts und Slopes durch Eigenschaften der Gruppen (d.h., L2-Prädiktoren) erklären?
- Beispiele für Level-2-Prädiktoren
 - „Echte“ L2-Variablen
 - Sektor der Schule (privat vs. staatlich)
 - Gesamtgröße der Schule
 - L1-Variablen, die zu L2-Variablen aggregiert wurden
 - Durchschnittlicher SES einer Schule
 - „minority proportion“: Anteil der Schüler*innen einer Schule, die einer Minderheit angehören
 - „gender proportion“: Geschlechterverhältnis
 - L2-Variablen sind konstant für jede L1-Einheit innerhalb einer L2-Gruppe

Das Random-Intercept, random-slope-Modell mit L2-Prädiktor

- Level-1-Gleichung:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

z_j : Prädiktor auf L2
Nur Index j (nicht i):
Variiert nur zwischen den
Gruppen; keine individuelle
Variation innerhalb der
Gruppe!

- Level-2-Gleichungen:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}z_j + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}z_j + u_{1j}$$

- γ_{01} : Einfluss des Level-2-Prädiktors z_j auf gruppenspezifische Intercepts β_{0j}
- γ_{11} : Einfluss des Level-2-Prädiktors z_j auf gruppenspezifische Slopes β_{1j}
- Die Variabilität der β_{*j} soll also nun (zum Teil) durch systematische Einflüsse Z auf die Gruppe erklärt werden und der zufällige, unsystematische Anteil (u_{*j}) entsprechend verringert.
- Die random Regressionengewichte sind nun selber Kriterien geworden, die durch andere Variablen (auf L2) vorhergesagt werden.
- „Regression innerhalb einer Regression“

Das Random-Intercept, random-slope-Modell mit L2-Prädiktor

- Level-1-Gleichung:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

- Level-2-Gleichungen:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}z_j + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}z_j + u_{1j}$$

L2-Prädiktoren erscheinen
nur in den L2-Gleichungen,
L3-Prädiktoren nur in den
L3-Gleichungen, etc!

- Kombinierte Gleichung:

$$y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{01}z_j + u_{0j}) + (\gamma_{10} + \gamma_{11}z_j + u_{1j})x_{ij} + r_{ij}$$

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}z_j + \gamma_{10}x_{ij} + \gamma_{11}z_jx_{ij} + u_{0j} + u_{1j}x_{ij} + r_{ij}$$

Fixed part

Random part

Beispiel 1: Übersetzung in Imer Syntax Dichotomer L2-Prädiktor

$$y_{ij} = \underbrace{\gamma_{00} + \gamma_{01}z_j + \gamma_{10}x_{ij} + \gamma_{11}z_jx_{ij}}_{\text{Fixed part}} + \underbrace{u_{0j} + u_{1j}x_{ij} + r_{ij}}_{\text{Random part}}$$

Das selbe mit konkreten Variablennamen:

- SES_{ij} : Sozioökonomischer Status der Personen auf Level 1
- $sector_j$: gehört die Schule dem öffentlichen Sektor an (= 0) oder ist sie katholisch (= 1)?

$$MathAch_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}sector_j + \gamma_{10}SES_{ij} + \gamma_{11}sector_jSES_{ij} + u_{0j} + u_{1j}SES_{ij} + r_{ij}$$

Als Imer-Syntax:

MathAch ~ 1 + sector + SES + sector:SES + (1 + SES|School)

An der kombinierten Gleichung sieht man: Prädiktoren von beiden Levels stehen gleichberechtigt nebeneinander

Beispiel 1: Ergebnisse Dichotomer L2-Prädiktor

$\text{MathAch} \sim 1 + \text{SES} + \text{sector} + \text{SES}:\text{sector} + (1 + \text{SES}|\text{School})$

Dummy-Kodierung für ‚sector‘:

0 = „public“

1 = „catholic“

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
School	(Intercept)	3.82107	1.9548	
	SES	0.07587	0.2754	1.00
Residual		36.78760	6.0653	

Number of obs: 7185, groups: School, 160

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value	Pr(> t)
(Intercept)	11.7518	0.2318	152.4362	50.699	< 2e-16 ***
SES	2.9575	0.1431	1351.9906	20.669	< 2e-16 ***
sectorcatholic	2.1295	0.3459	145.3807	6.156	6.90e-09 ***
SES:sectorcatholic	-1.3134	0.2156	1391.9598	-6.092	1.44e-09 ***

$$\text{MathAch}_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\text{sector}_j + \gamma_{10}\text{SES}_{ij} + \gamma_{11}\text{sector}_j\text{SES}_{ij} + u_{0j} + u_{1j}\text{SES}_{ij} + r_{ij}$$

$$\widehat{\text{MathAch}}_{ij} = 11.75 + 2.13 * \text{sector}_j + 2.96 * \text{SES}_{ij} + (-1.31) * \text{sector}_j\text{SES}_{ij}$$

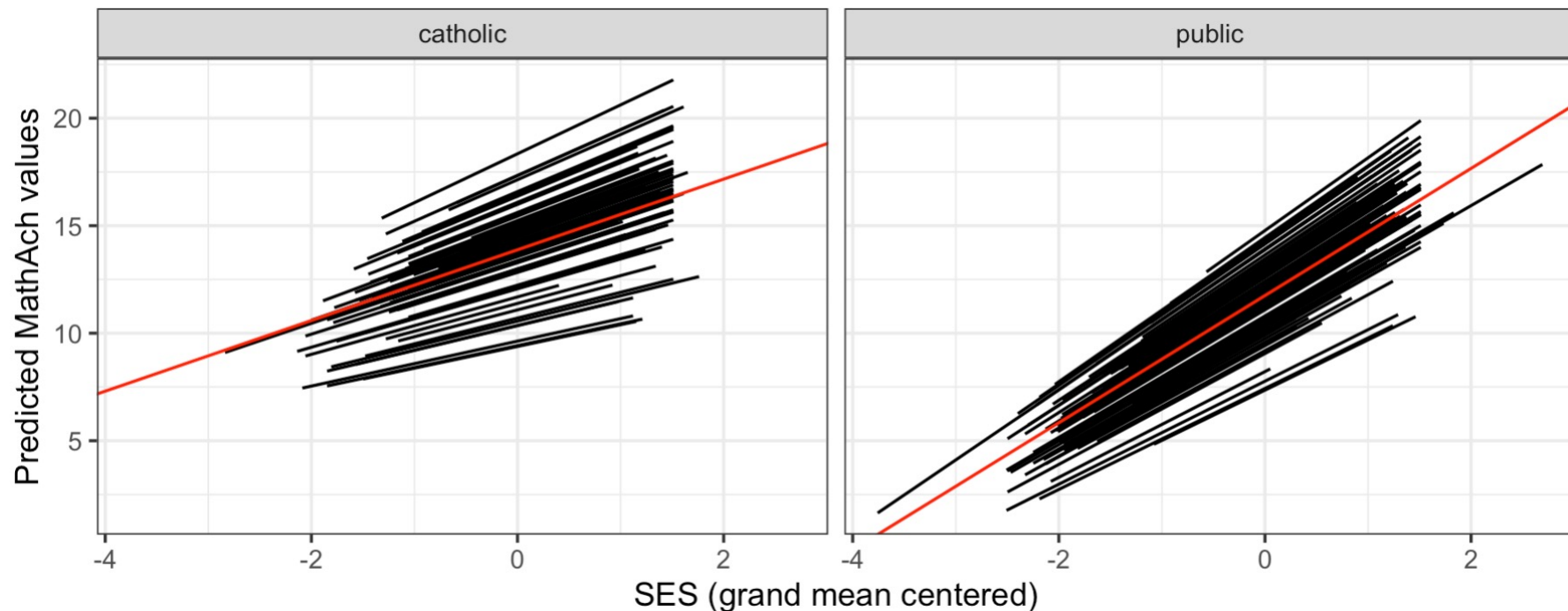
Das Random-Intercept, random-slope- Modell mit dichotomem L2-Prädiktor

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
School	(Intercept)	3.82107	1.9548	
	SES	0.07587	0.2754	1.00
Residual		36.78760	6.0653	

$b0_public = 11.75$
 $b0_catholic = 11.75 + 2.13 = 13.88$
 $b1_public = 2.96$
 $b1_catholic = 2.96 + (-1.31) = 1.65$

Estimate	Std. Error	df	t value	Pr(> t)
(Intercept)	11.7518	0.2318	152.4362	50.699 < 2e-16 ***
SES	2.9575	0.1431	1351.9906	20.669 < 2e-16 ***
sectorcatholic	2.1295	0.3459	145.3807	6.156 6.90e-09 ***
SES:sectorcatholic	-1.3134	0.2156	1391.9598	-6.092 1.44e-09 ***



Kontinuierlicher L2-Prädiktor

- Hängt die Matheleistung einer Schüler*in mit durchschnittlichem SES mit dem Minoritätenanteil in einer Schule zusammen?
 - Die Level-2-Variable „minority proportion“ sagt das Intercept der L1-Regressionsgleichung vorher
- Hängt der Einfluss des SES auf die Matheleistung ab vom Minoritätenanteil in einer Schule?
 - Die Level-2-Variable „minority proportion“ sagt den Slope der L1-Regressionsgleichung vorher
- Kodierung: minorityProp = [0; 1]
- `MathAch ~ 1 + SES + minorityProp + SES:minorityProp + (1 + SES|School)`

Kontinuierlicher L2-Prädiktor

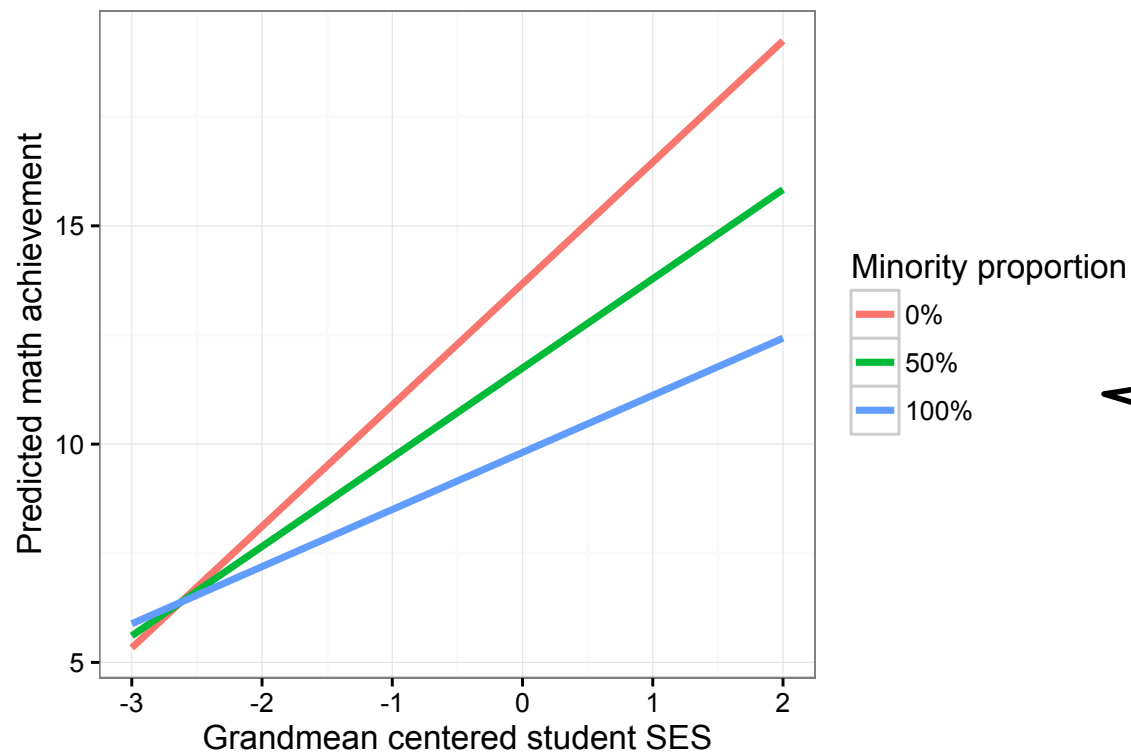
Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
School	(Intercept)	3.7842	1.945	
	SES	0.2745	0.524	-0.53
Residual		36.7888	6.065	

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	13.6760	0.2325	148.9400	58.817	< 2e-16	***
SES	2.7806	0.1575	171.7400	17.649	< 2e-16	***
minorityProp	-3.8660	0.5786	155.4400	-6.682	3.98e-10	***
SES:minorityProp	-1.4724	0.3710	145.2100	-3.968	0.000113	***

cross-level-Interaktion



Berechne das vorhergesagte Intercept und SES-Slope von einer Schule mit 0% Minoritätsanteil, und einer Schule mit 50% Minoritätsanteil.

Beispiel 3: Zwei interagierende L1-Prädiktoren

- Level-1-Gleichung:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + \beta_{2j}w_{ij} + \beta_{3j}x_{ij}w_{ij} + r_{ij}$$

Interaktionsterm

- Level-2-Gleichungen:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

$$\beta_{3j} = \gamma_{30} + u_{3j}$$

Welche Modellparameter
der Level-1-Gleichung
dürfen zwischen den
Gruppen variieren?

- Gesamtgleichung:

$$y_{ij} = (\gamma_{00} + u_{0j}) + (\gamma_{10} + u_{1j})x_{ij} + (\gamma_{20} + u_{2j})w_{ij} + (\gamma_{30} + u_{3j})x_{ij}w_{ij} + r_{ij}$$

$$y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + \gamma_{10}x_{ij} + u_{1j}x_{ij} + \gamma_{20}w_{ij} + u_{2j}w_{ij} + \gamma_{30}x_{ij}w_{ij} + u_{3j}x_{ij}w_{ij} + r_{ij}$$

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}x_{ij} + \gamma_{20}w_{ij} + \gamma_{30}x_{ij}w_{ij} + u_{0j} + u_{1j}x_{ij} + u_{2j}w_{ij} + u_{3j}x_{ij}w_{ij} + r_{ij}$$

Fixed part

Random part

Beispiel 3: Zwei interagierende L1-Prädiktoren

MathAch ~ 1 + Sex + SES + Sex:SES + (1 + Sex + SES + Sex:SES | School)

Random effects:

Groups	Name	Variance	Std.Dev.	Corr
School	(Intercept)	5.4849	2.3420	
	SexFemale	0.9912	0.9956	-0.56
	SES	0.5253	0.7248	-0.08 -0.05
	SexFemale:SES	0.4395	0.6630	0.24 -0.60 -0.69
Residual		36.4306	6.0358	

Number of obs: 7185, groups: School, 160

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value	Pr(> t)
(Intercept)	13.2608	0.2206	141.7200	60.118	< 2e-16 ***
SexFemale	-1.1941	0.1874	115.4600	-6.373	3.94e-09 ***
SES	2.1672	0.1620	137.1800	13.376	< 2e-16 ***
SexFemale:SES	0.4129	0.2091	123.6800	1.975	0.0505 .

Dummy-Kodierung für Sex:

0 = „Male“

1 = „Female“

Beispiel 3: Zwei interagierende L1-Prädiktoren

MathAch ~ 1 + Sex + SES + Sex : SES + (1 + Sex + SES + Sex : SES | School)

Random effects:

Groups	Name	Varianz der Intercepts β_{0j}	Varianz des Slopes β_{1j}	Varianz des Slopes β_{2j}	Varianz des Slopes β_{3j}	
School	(Intercept)	5.4849	2.3420			
	SexFemale	0.9912	0.9956	-0.56		
	SES	0.5253	0.7248	-0.08	-0.05	
	SexFemale:SES	0.4395	0.6630	0.24	-0.60	-0.69
Residual		36.4306	6.0358			

Number of obs: 7185, groups: School, 160

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	13.2608	0.2206	141.7200	60.118	< 2e-16	***
SexFemale	-1.1941	0.1874	115.4600	-6.373	3.94e-09	***
SES	2.1672	0.1620	137.1800	13.376	< 2e-16	***
SexFemale:SES	0.4129	0.2091	123.6800	1.975	0.0505	.

Dummy-Kodierung für Sex:

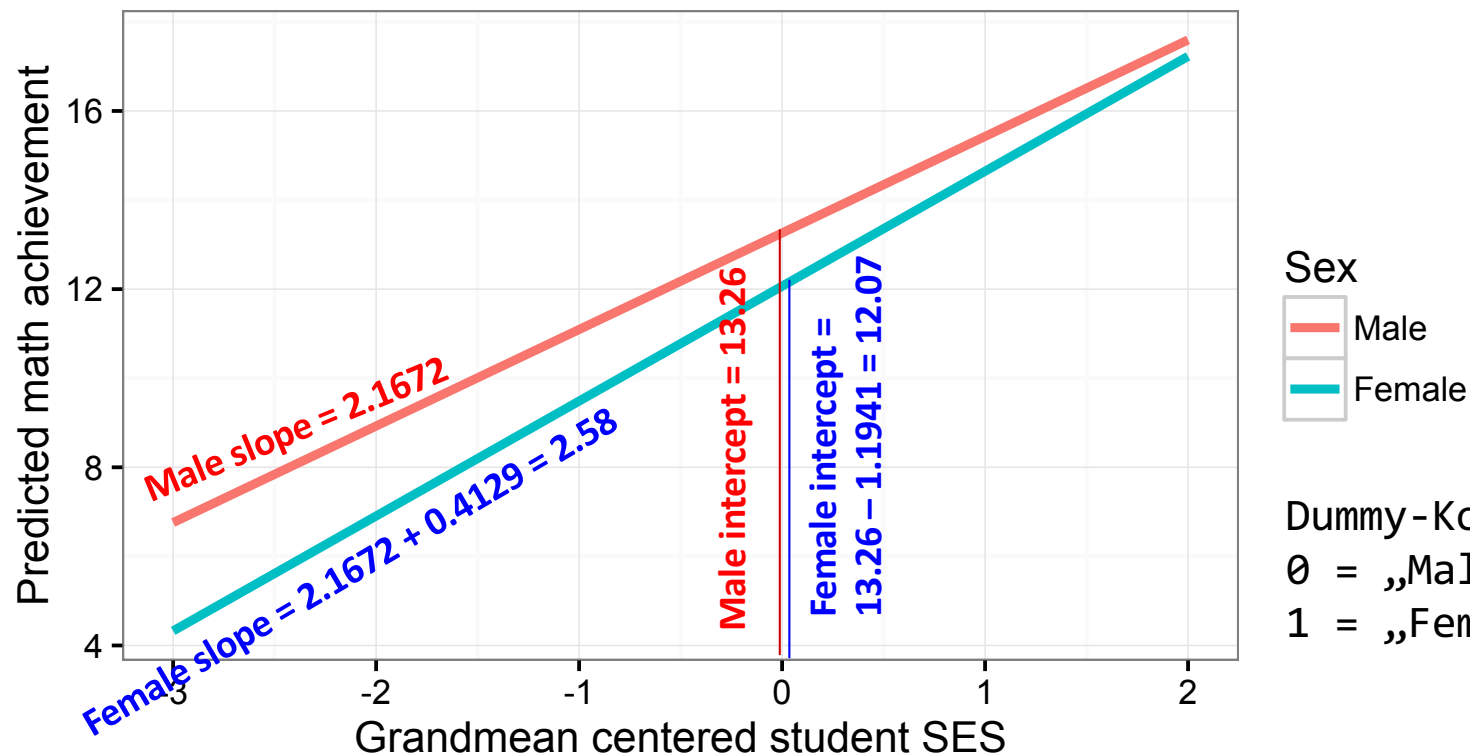
0 = „Male“

1 = „Female“

Zwei interagierende L1-Prädiktoren

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	13.2608	0.2206	141.7200	60.118	< 2e-16	***
SexFemale	-1.1941	0.1874	115.4600	-6.373	3.94e-09	***
SES	2.1672	0.1620	137.1800	13.376	< 2e-16	***
SexFemale:SES	0.4129	0.2091	123.6800	1.975	0.0505	.



Dummy-Kodierung für Sex:
0 = „Male“
1 = „Female“