Lineare Gemischte Modelle (4) – Zentrierung von Prädiktorvariablen

Der 0 eine Bedeutung geben

- Wir haben in den letzten Sitzungen gesehen, dass sich die Interpretation von Parametern häufig auf den Fall bezieht, dass einzelne Prädiktoren den Wert 0 annehmen.
- Im Fall von **diskreten** Prädiktoren kann man den Wert 0 einer **Referenzkategorie** zuweisen **(Dummykodierung)** damit sich inhaltliche Interpretationen dann entsprechend auf diese Kategorie beziehen.
- Im Fall von **stetigen** Prädiktoren kann für entsprechende Interpretationen eine **Ausprägung als Referenz** gewählt werden und alle anderen Ausprägungen daran **zentriert** werden.
- *Hinweis*: Es werden in der Regel nur die *Prädiktor*variablen zentriert. Eine Ausnahme stellt die *z*-Standardisierung der abhängigen Variable dar, um auch hier die Interpretation zu erleichtern.

Zentrierung vs. Standardisierung

Zentrierung einer Variablen X: $X_{i\_zentriert} = X_i - c$

- Die Konstante c unterscheidet sich, je nach Art der Zentrierung.
  Z.B.: Gesamtmittelwert, Gruppenmittelwert, minimaler Wert, maximaler Wert, …
- Die Konstante c kann entweder durch theoretische Überlegungen bestimmt werden (z.B. kleinster theoretisch möglicher Wert), basierend auf der vorliegenden Stichprobe geschätzt werden (z.B. Gesamtmittelwert in der Stichprobe), oder basierend auf anderen Daten geschätzt werden (z.B. Gesamtmittelwert in einer Normstichprobe oder Informationen aus einer Metaanalyse).
- Bei der Zentrierung verändert sich die Bedeutung der 0, aber die Einheit bleibt gleich.

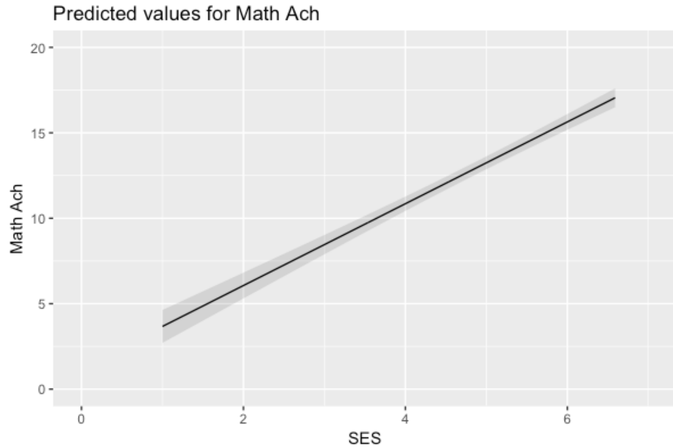
Z-Standardisierung einer Variablen X: $Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{SD(X)}$

- Wie bei der Zentrierung können $\bar{X}$ und $SD(X)$ anhand verschiedener Daten geschätzt werden. Am häufigsten wird die vorliegende Stichprobe verwendet.
- Bei der Z-Standardisierung verändert sich die Bedeutung der 0 **und** die Einheit.
- Die Z-Standardisierung („minus Mittelwert, geteilt durch Standardabweichung") ist die häufigste Art von Standardisierung. Aber auch hier sind andere Formen möglich.

Unzentriert

Unzentriertes Modell: MathAch ~ 1 + SES + (1+SES|School)


```
Random effects:

Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
School   (Intercept) 15.6451  3.9554
         SES          0.4129  0.6426   -0.83
Residual             36.8295  6.0687

Number of obs: 7185, groups:  School, 160

Fixed effects:

            Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.2756     0.6013 156.3710   2.121   0.0355 *
SES           2.3939     0.1181 157.5264  20.266   <2e-16 ***
```

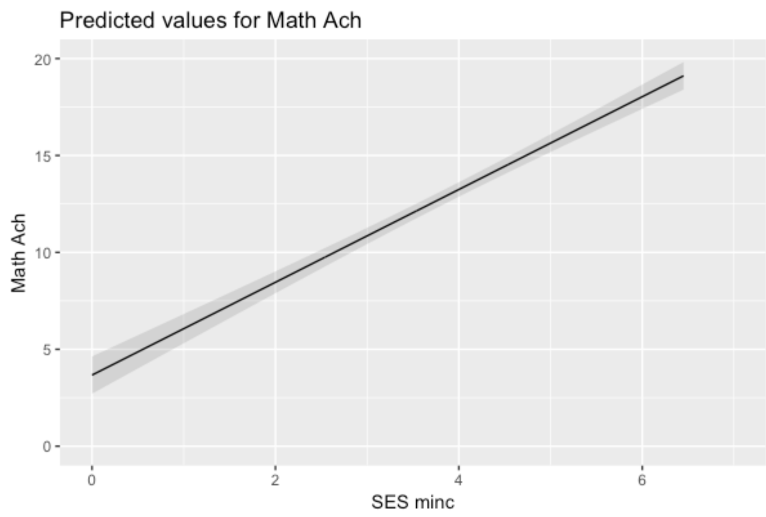


- Der Intercept bezieht sich auf die Ausprägung $SES = 0$
- Personen mit einem $SES = 0$ haben also eine geschätzte Mathematiknote von $\widehat{MathAch} = \mathbf{1.276}$
- Wir sehen auch, dass sich dieser Schätzwert signifikant von 0 unterscheidet $(\mathrm{p} = 0.0355)$.
- Nur, wer hat eigentlich einen $SES = 0$?
- **Nachdem die Skala hier bei 1 beginnt, niemand...**

Zentrierung am Skalenminimum

Am Skalenminimum zentriertes Modell:


```
hsb$SES.minc <- hsb$SES - min(hsb$SES)

Formula: MathAch ~ 1 + SES.minc + (1 + SES.minc | School)


Random effects:
Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
School   (Intercept) 11.8200  3.4380
         SES.minc     0.4129  0.6426   -0.77
Residual             36.8295  6.0687


Fixed effects:

            Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.6694     0.4907 153.9063   7.479 5.34e-12 ***
SES.minc      2.3939     0.1181 157.5273  20.266  < 2e-16 ***
```



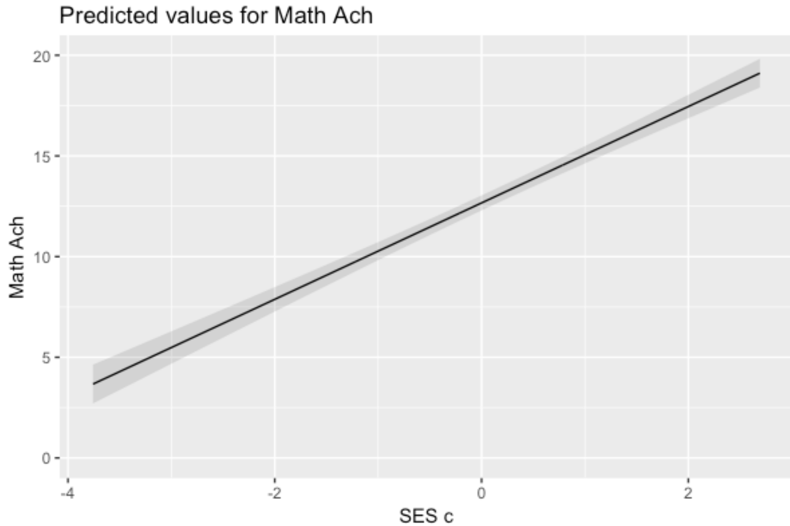
- Der Intercept bezieht sich immer auf die Ausprägung $SES = 0$
- Personen mit einem $SES = 0$ haben also nun eine geschätzte Mathematiknote von $\widehat{MathAch} = \mathbf{3.67}$
- Wir sehen auch, dass sich dieser Schätzwert signifikant von 0 unterscheidet ($p < 0.001$).
- Nur, wer hat eigentlich einen $SES = 0$?
- **Jemand, der die minimal mögliche Ausprägung in SES hat**

Zentrierung am Gesamtmittelwert

aka. Grand-mean Zentrierung

Grand-mean Zentrierung

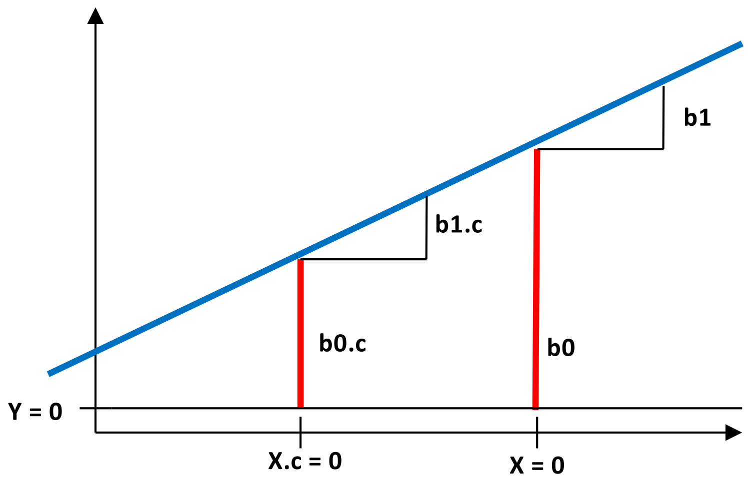

```
hsb$SES.c <- hsb$SES - mean(hsb$SES)

Formula: MathAch ~ 1 + SES.c + (1 + SES.c | School)


Random effects:
Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
School   (Intercept)  4.8284  2.1974
         SES.c        0.4129  0.6426   -0.11
Residual             36.8295  6.0687

Fixed effects:

            Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
(Intercept)  12.6658     0.1898 145.5479   66.72   <2e-16 ***
SES.c         2.3939     0.1181 157.5270   20.27   <2e-16 ***
```



- Der Intercept bezieht sich immer auf die Ausprägung $SES = 0$
- Personen mit einem $SES = 0$ haben also nun eine geschätzte Mathematiknote von $\widehat{MathAch} = \mathbf{12.67}$
- Wir sehen auch, dass sich dieser Schätzwert signifikant von 0 unterscheidet ($\mathrm{p} < 0.001$).
- Nur, wer hat eigentlich einen $SES = 0$?
- **Jemand, der im SES die durchschnittliche Ausprägung dieser Stichprobe hat**

Grand-mean Zentrierung ändert Schätzung der Intercepts, aber nicht der Slopes

- Das Intercept ändert sich mit der (Re)Zentrierung (sowohl geschätzter Wert als auch Teststatistik)
- Die Slopes (und auch Interaktionen) bleiben immer identisch (sowohl geschätzter Wert als auch Teststatistik)



Unzentriert

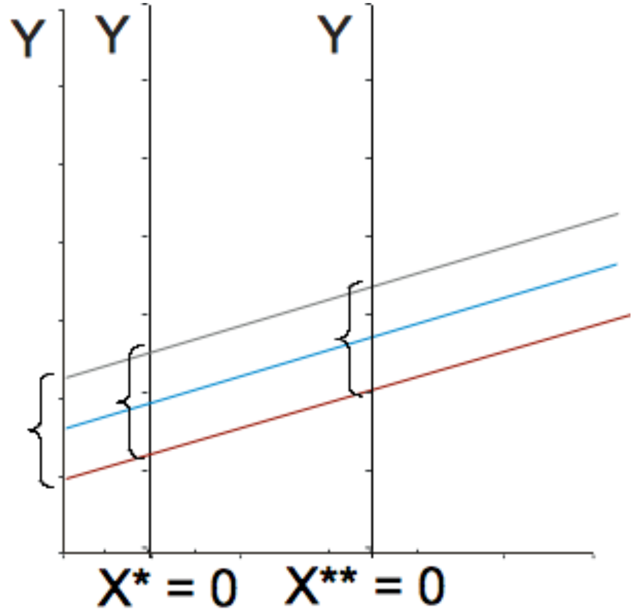
```
Fixed effects:
            Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.2756     0.6013 156.3710   2.121   0.0355 *
SES           2.3939     0.1181 157.5264  20.266   <2e-16 ***
```

Zentriert

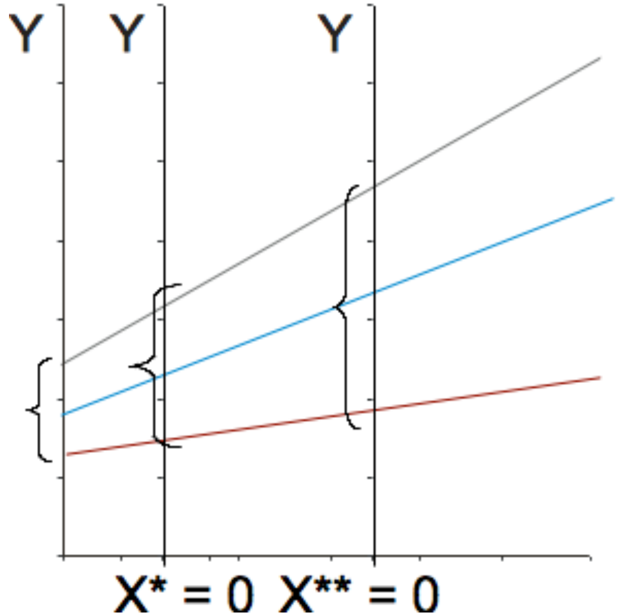
```
Fixed effects:
            Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
(Intercept)  12.6658     0.1898 145.5479   66.72   <2e-16 ***
SES.c         2.3939     0.1181 157.5270   20.27   <2e-16 ***
```

Konsequenzen der Grand-mean Zentrierung auf die Varianz der Intercepts

- Für Modelle *ohne* variierende Slopes: Die Varianz der Random Intercepts ist gleich für jede beliebige Wahl des Nullpunkts (parallele Slopes)



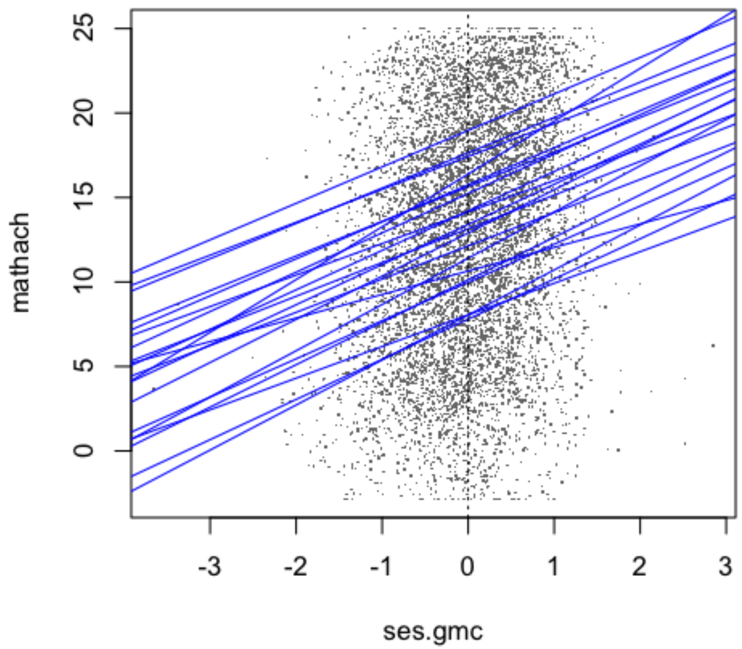
- Für Modelle *mit* variierenden Slopes: Die Varianz der Random Intercepts hängt von der Wahl des Nullpunkts ab

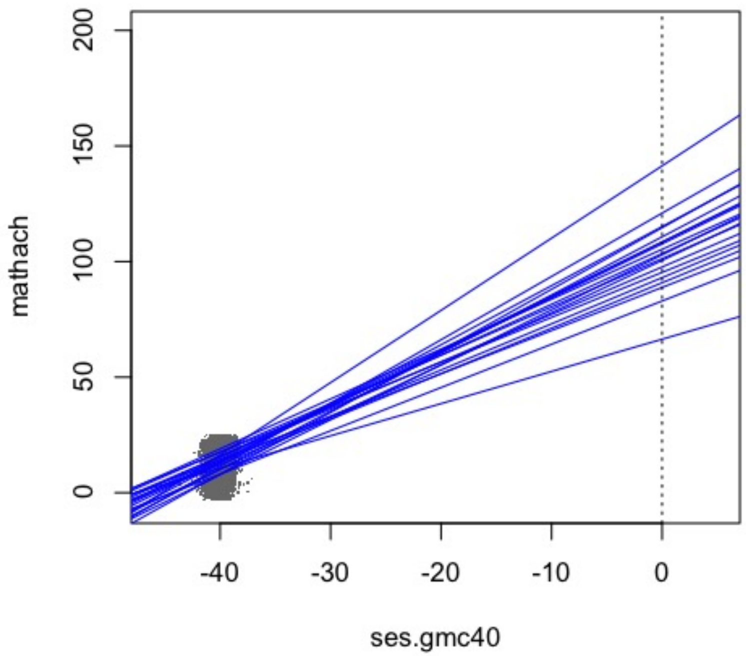


τ_{01}: Konsequenzen der Grand-mean Zentrierung auf die Kovarianz von Random Intercepts und Slopes

- Korrelation von 1 ist OK (kein zwingender Indikator von Missspezifikation)
- Korrelation von 1 kann ein Indikator für eine ungünstige Zentrierung sein:

Shift of SES	τ_{01}
0	.02
1	.29
2	.51
3	.66
40	.996





Zentrierung am Mittelwert der jeweiligen Gruppe

aka. Group-mean Zentrierung

Group-mean Zentrierung

- Je nach Fragestellung kann es relevant sein, den Bezugspunkt auf den Mittelwert der jeweiligen Gruppe zu legen.
- Beispiel: Der durchschnittliche SES in der Schule in der sich eine Schüler*in befindet. Von jedem individuellen Wert muss also der jeweilige Gruppenmittelwert abgezogen werden.

  => neue SES-Variable gibt den SES einer Schüler*in im Vergleich zum Schulmittelwert an

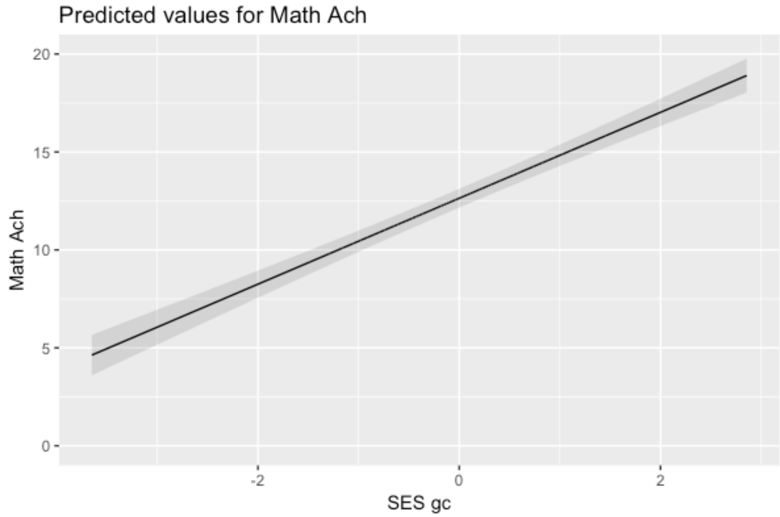
- Beispiel bei Wiederholungsmessung innerhalb von Personen: Bezugspunkt ist **jeweils** die **durchschnittliche** Stimmung **einer Person**.

  => neue Stimmungs-Variable gibt die relative Stimmung einer Person im Vergleich zu ihrer durchschnittlichen Stimmung an

Group-mean Zentrierung

```
hsb$SES.gc <- hsb$SES - ave(hsb$SES, hsb$School)
```

```
Formula: MathAch ~ 1 + SES.gc + (1 + SES.gc | School)


Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 School   (Intercept)  8.681   2.9463
          SES.gc       0.694   0.8331   0.02
 Residual             36.700   6.0580


Fixed effects:
            Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
(Intercept)  12.6367     0.2445 156.7532   51.68   <2e-16 ***
SES.gc        2.1932     0.1283 155.2145   17.10   <2e-16 ***
```



- Der Intercept bezieht sich immer auf die Ausprägung $SES = 0$
- Personen mit einem $SES = 0$ haben also nun eine geschätzte Mathematiknote von $\widehat{MathAch} = \mathbf{12.64}$
- Wir sehen auch, dass sich dieser Schätzwert signifikant von 0 unterscheidet ($p < 0.001$).
- Nur, wer hat eigentlich einen $SES = 0$?
- **Jemand, der im SES die durchschnittliche Ausprägung ihrer Gruppe hat**

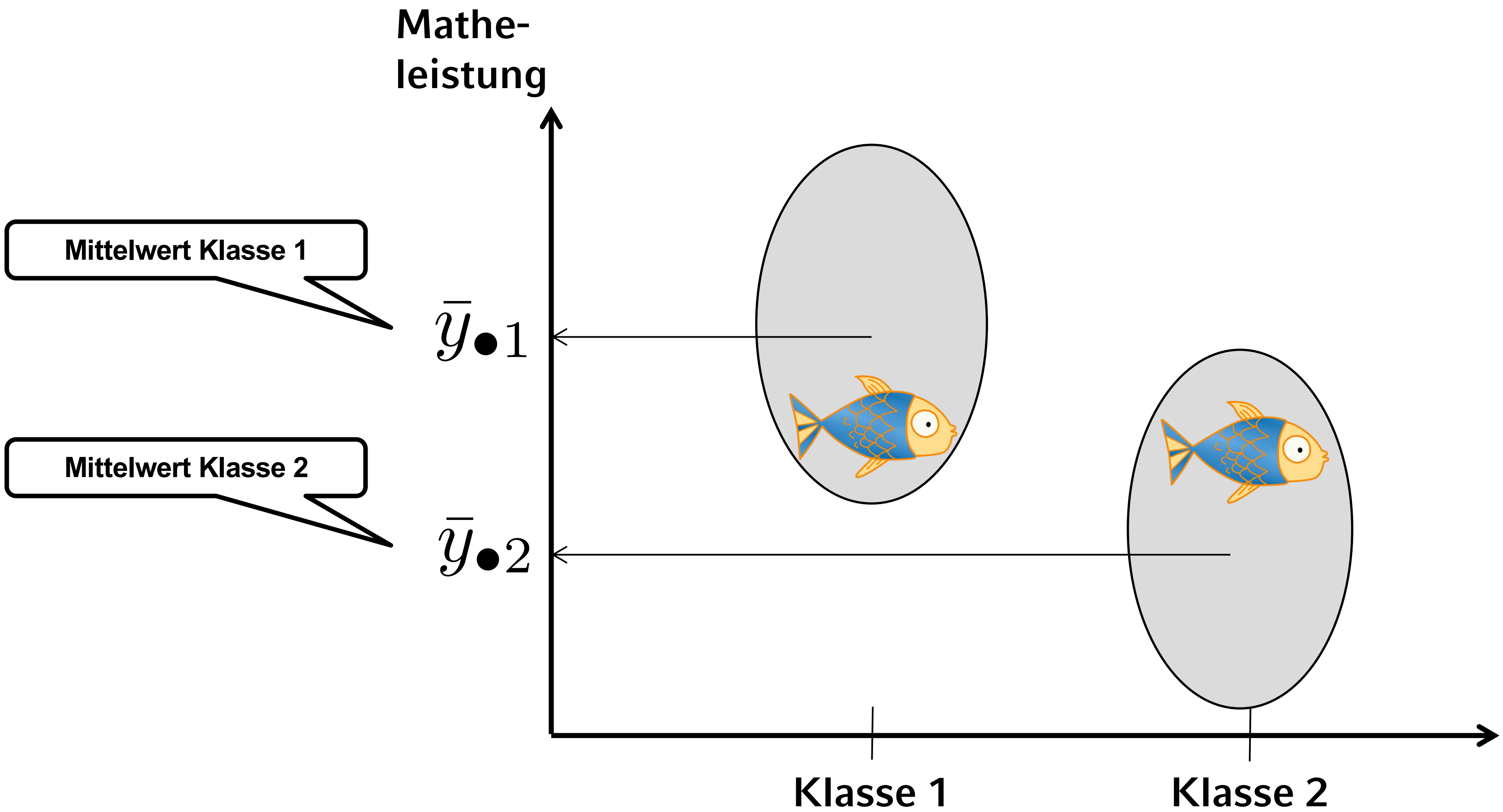
Group-mean Zentrierung

- Wenn die Gruppen sich in ihren Mittelwerten unterscheiden…
  - können Personen mit eigentlich unterschiedlicher unzentrierter Ausprägung in der Group-mean zentrierten Variable den gleichen Wert erhalten.
  - können Personen mit eigentlich gleicher unzentrierter Ausprägung in der Group-mean zentrierten Variable einen unterschiedlichen Wert erhalten.
- Unterschiede der Gruppen werden also herausgerechnet.
- Möchten wir untersuchen, ob systematische Unterschiede der Gruppen in der vorher Group-mean zentrierten Variable einen Einfluss haben, können wir die Mittelwerte der Gruppen als L2-Variable aufnehmen.
  - ➢ CWC(M) Ansatz

CWC(M) Ansatz

- Level-1 Variablen konfundieren L1- und L2-Effekte
- CWC(M): „**C**entered **W**ithin **C**ontext with reintroduction of the **M**ean at level 2“
- Der Einfluss einer Variable wird getrennt auf zwei Analyseebenen betrachtet:
  1. Welchen Einfluss haben Unterschiede **innerhalb** der Bezugsgruppe?
     Z.B. in Bezug auf die durchschnittliche Ausprägung innerhalb der Gruppe.
     - ➢ Group-mean Zentrierung
  2. Welchen Einfluss haben Unterschiede der Gruppen auf individuelle Effekte?
     Z.B: macht es einen Unterschied für eine Person, in einer Gruppe mit hoher durchschnittlicher Ausprägung zu sein?
     - ➢ Mittelwerte der Gruppe als Level-2 Variable

Exkurs: big-fish-little-pond-effect (BFLPE; auch **Bezugsgruppeneffekt** genannt)



Zentrierung der L2-Variablen

- Also: Aus ursprünglich *einer* L1-Variablen werden jetzt *zwei* unabhängige Variablen: der reine L1-Effekt (centered within context) sowie der reine L2-Effekt (der between-group Effekt)
  - Wie können aus ursprünglich einer Variable plötzlich zwei werden? Sind die nicht zu 100% konfundiert? Nein! Es kommt zusätzliche Information hinzu, nämlich die Gruppierungsstruktur, anhand derer die Gruppenmittelwerte gebildet werden. Dadurch sind beide neuen Variablen **orthogonal** und beinhalten jeweils separate Informationen.
- Um die neu gebildete („hochaggregierte") L2-Variable besser interpretieren zu können, kann/sollte diese wieder ordentlich zentriert werden, so dass deren 0 interpretierbar ist.
  - Dazu wird zum Beispiel der Mittelwert der Gruppenmittelwerte gebildet (→ „Was ist ein typischer Gruppenmittelwert?") und von allen Gruppenmittelwerten abgezogen.

Zentrierung der L2-Variablen

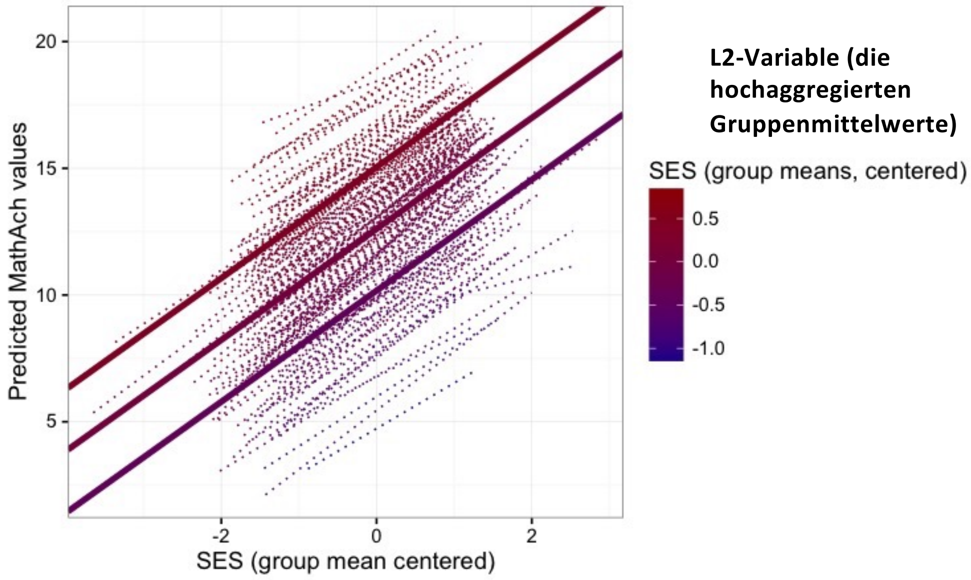
School	SES (Original-variable, L1)	SES.m (Gruppen-mittelwert, L2)	SES.gc (Group-mean centered L1)	SES.m.c (zentrierter Gruppen-mittelwert, L2)
A	2	3	2-3 = -1	3 – 4.5 = -1.5
A	2	3	2-3 = -1	3 – 4.5 = -1.5
A	5	3	5-3 = 2	3 – 4.5 = -1.5
B	5	6	5-6 = -1	6 – 4.5 = +1.5
B	6	6	6-6 = 0	6 – 4.5 = +1.5
B	7	6	7-6 = 1	6 – 4.5 = +1.5

Mittelwert der Gruppenmittelwerte:
(3 + 6) / 2 = 4.5

In das Modell würde man dann in der Regel SES.gc und SES.m.c aufnehmen (siehe nächste Folie)

CWC(M) Ansatz


```
Formula: MathAch ~ 1 + SES.gc + SES.m.c + (1 + SES.gc | School)

Random effects:
 Groups    Name         Variance Std.Dev. Corr
 School    (Intercept)  2.6931   1.6411
           SES.gc       0.6858   0.8282   -0.19
 Residual              36.7125   6.0591


Fixed effects:
            Estimate
(Intercept)  12.6448
SES.gc        2.1913
SES.m.c       5.8964
```



L2-Variable (die hochaggregierten Gruppenmittelwerte)

L1-Variable (am Gruppenmittelwert zentriert)

- Personen mit einem in ihrer Gruppe durchschnittlichen SES aus einer Gruppe, die einen durchschnittlichen Gruppen-SES aufweist, haben eine geschätzte Mathematiknote von $\widehat{MathAch} = \mathbf{12.64}$
- Unterscheiden sich zwei Personen innerhalb einer Gruppe um 1 SES, unterscheidet sich die geschätzte Mathematiknote um **2.19**.
- Zwei Personen mit in der jeweiligen Gruppe durchschnittlichem SES, aber in Gruppen die sich im durchschnittlichen SES um 1 unterscheiden, unterscheiden sich in der geschätzten Mathematiknote um **5.89**.

Ein echtes Beispiel

- Zygar, C., Hagemeyer, B., Pusch, S., & Schönbrodt, F. D. (2018). From Motive Dispositions to States to Outcomes: An Intensive Experience Sampling Study on Communal Motivational Dynamics in Couples. *European Journal of Personality*, *32*, 306–324. doi:10.1002/per.2145
- 68 Paare, 2 Wochen 5x täglich per App befragt, d.h.,
  - L1 = Messzeitpunkte innerhalb einer Person
  - L2 = Personen
- Hier dargestellte Forschungsfrage: Kommunale Motivation (d.h., die Motivation, Nähe und Intimität zu erleben) zu t_1 sagt Näheverhalten zwischen t_1 und t_2 vorher.

for each gender. Further, we *z*-standardized all continuous measures using the grand-mean and standard deviation across both genders. For analyses with predictor variables on the within-subject level, we additionally centered these variables at the individual mean, so that zero reflects a typical state for that individual.[8] In these analyses, we controlled for the person-mean of the states at level 2 ('centered within context with reintroduction of the subtracted means at Level-2' method; Zhang, Zyphur, & Preacher, 2009, p.709). We also controlled for linear trends over time and potentially confounding variables correlated with the passage of time (Bolger &

Ein echtes Beispiel

0 = Weekend
1 = Weekday

0 (first measurement)...
69 (last)

L2 variable

L1: Centered within person

CWC(M)

Table S3

Full Results for Multilevel Analyses Predicting Instrumental Communal Behavior by Communion Motivation (H3)

Predicting instrumental communal behavior between surveys[a] (z)						
Variables	Estimate	*SE*	*df*	*t* value	*p*	$CI_{95\%}$
Fixed Effects						
Female Intercept	-0.022	0.059	83.542	-0.368	.714	[-0.137,0.094]
Male Intercept	-0.047	0.063	74.762	-0.742	.460	[-0.169,0.076]
Weekend Dummy[a]	-0.028	0.023	5038.693	-1.236	.216	[-0.073,0.016]
Survey Index[a]	0.001	0.000	5004.53	1.880	.060	[0.000,0.002]
t1-*t2* Amount of Time Spent with Partner[a] (z)	0.511	0.011	5083.239	46.333	$< .001$	[0.489,0.532]
Mean Communion Motivation[b] (z)	0.253	0.062	129.638	4.055	$< .001$	[0.130,0.375]
***t1* Communion Motivation[a] (z)**	**0.073**	**0.021**	**59.344**	**3.531**	**$< .001$[c]**	**[0.032,0.113]**
Random Effects						
Var (SD) of Female Intercepts	0.192 (0.438)					
Var (SD) of Male Intercepts	0.212 (0.46)					
Var (SD) of *t1* Communion Motivation (z)	0.015 (0.124)					
Cov (Corr) of Female and Male Intercept	0.070 (0.346)					
Cov (Corr) of Female Intercept and *t1* Communion Motivation (z)	0.020 (0.363)					
Cov (Corr) of Male Intercept and *t1* Communion Motivation (z)	0.031 (0.538)					
Residual Var (SD)	0.483 (0.695)					
$R^2_{GLMM(m)}$	.304					

Note. $N = 5154$ observations in 68 couples.
z = *z*-standardized (level 1 variables are additionally person-mean centered), Var = Variance, Cov = Covariance, SD = Standard Deviation, Corr = Correlation.
The effect focal to our hypothesis is printed in boldface.
[a] Level 1 variable, [b] Level 2 variable, [c] This *p*-value is one-tailed, as the direction of the effects was preregistered.

Zur Interpretation: Wann muss man was „null setzen“?

- Bei der Interpretation des **Intercepts** muss man immer alle Prädiktoren auf Null setzen. *Hinweis:* Eine (multiplikative) Interaktion ist natürlich automatisch Null, sobald eine der beiden Komponenten null ist).
- Wenn im Modell nur **Haupteffekte** sind (ohne Interaktion), dann muss man bei der Interpretation eines Slopes die anderen Prädiktoren nicht auf Null setzen: Der Slope ist immer gleich, egal welchen Wert die anderen Prädiktoren annehmen.
  - Daher wurde bei der Interpretation der beiden Slopes auf der vorherigen Folie auch nicht der andere Prädiktor auf Null gesetzt.
- Sobald eine **Interaktion** (X:Y) im Spiel ist, hängt der Slope von der Ausprägung des anderen Prädiktors in der Interaktion ab. Dann ist das *estimate* für einen Haupteffekt der Slope für einen Prädiktor, wenn der andere (interagierende) Prädiktor den Wert Null annimmt.

Was kann man bei einer Interaktion „auf random setzen“?


```
MathAch ~ 1 + L1 + L2 + L1:L2 + (1 + L1 | School)
MathAch ~ 1 + L1a + L1b + L1a:L1b + (1 + L1a + L1b + L1a:L1b | School)
```

- Die Modellsyntax des lme4 R-Pakets verleitet dazu, sehr komplizierte Modelle zu schätzen und immer mehr Terme in der Klammer zu den Random Effects hinzuzufügen.
- Random Effects einfach blind auszuprobieren ist aber keine gute Idee. Wir empfehlen folgendes Vorgehen:
  - Inhaltlich überlegen, was ein sinnvolles Modell „können muss“
  - Level 1, Level 2,… Gleichungen anhand inhaltlicher Überlegungen aufstellen
  - Kombinierte Gleichung nutzen, um das Modell in lme4 abzubilden
  - Siehe das Beispiel aus der letzten Vorlesung…

Kombinierte Modellgleichung:

$$MathAch_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}SESgroup_j + \gamma_{10}SES_{ij} + \gamma_{11}SESgroup_jSES_{ij} + u_{0j} + u_{1j}SES_{ij} + r_{ij}$$

lme4-Syntax:

```
MathAch ~ 1 +   SESgroup  +   SES  +  SESgroup:SES  + (1 + SES|School)
```

Was kann man bei einer Interaktion „auf random setzen"?


```
MathAch ~ 1 + L1 + L2 + L1:L2 + (1 + L1 | School)
MathAch ~ 1 + L1a + L1b + L1a:L1b + (1 + L1a + L1b + L1a:L1b | School)
```

Ein paar Kommentare zu sinnvollen Random Effects in Modellen mit Interaktionen:

- Bei **cross-level-Interaktionen:**
  - Es wird nur der L1-Haupteffekt auf random gesetzt. In unserem Beispiel: `(1 + SES.gc | School)`
  - Den L2-Haupteffekt (SES.m.c) können wir nicht auf random setzen, da eine L2-Variable keine within-group Varianz erklären kann, und somit deren Koeffizient auch nicht zwischen Gruppen variieren kann.
  - Technisch könnten Sie auch die Interaktion auf random setzen, da durch die Multiplikation mit der L1-Variable die Interaktion innerhalb der L2-Einheiten variiert: `(1 + SES.gc + SES.gc:SES.m.c| School)`. Ein solches Modell lässt sich aber inhaltlich schwer begründen.

- Bei **Interaktionen zwischen zwei L1-Variablen**:
  - Es können beide Haupteffekte *und* die Interaktion auf random gesetzt werden.
  - Hinweis: Oft führen jedoch random terms von Interaktionen zu Problemen bei der Modellschätzung, weshalb sie in der Praxis oft weggelassen werden.

Zusammenfassung: Was verändert sich durch Zentrierung?

- Die Interpretation der Intercepts
- Die Interpretation anderer zusätzlicher Prädiktoren (die sich in der Regel auf den Fall beziehen, dass die anderen Prädiktoren den Wert 0 annehmen)
- Die Interpretation der Varianz der Random Intercepts (wie hoch ist die Varianz zwischen den Gruppen) bezogen auf
    a. Personen mit **keinem** SES (SES = 0 unzentriert)
    b. Personen mit durchschnittlichem SES (SES = 0 grand-mean zentriert)
    c. etc...
- Bei „einfachen“ Zentrierungen (am Minimum, am Skalenmittel, am Gesamtmittelwert) ist das Modell (zumindest im frequentistischen Setting) ansonsten jedoch äquivalent, da ein Prädiktor lediglich um eine Konstante verschoben wird.

Fazit

- Zentrierung vor allem nach **inhaltlichen** Gesichtspunkten wählen: *Jeder* Prädiktor sollte in der Regel eine sinnvoll interpretierbare Null haben!
- Grand-mean-Zentrierung ändert zwar einige Koeffizienten und deren Interpretation (weil die Null etwas anderes bedeutet), das *Gesamtmodell* ist jedoch mathematisch äquivalent zu einem nicht-zentrierten (oder einem anders Grand-mean zentrierten) Modell
  - z.B. sind die vorhergesagten Werte und der Modellfit identisch
- Group-mean Zentrierung ändert das Modell – wir untersuchen inhaltlich etwas Anderes!
- Bei Group-mean Zentrierung verliert man Information über die Gruppenmittelwerte
  → daher häufig sinnvoll: diese als neue L2-Variable wieder in das Modell einführen
- Im Zweifelsfall: Jede L1-Variable als getrennte L1- und L2-Variable (CWC(M)-Ansatz) in das Modell aufnehmen. *Nur* das ermöglicht eine saubere Trennung von L1- und L2-Effekten (und somit eine Entdeckung von potentiellen ökologischen Fehlschlüssen). D.h.:
  - Variablen auf Level 1 an Gruppenmittelwert zentrieren
  - Diesen Gruppenmittelwert als neue L2-Variable einführen; im Normalfall diese L2-Variable anhand aller L2-Gruppenmittelwerte zentrieren (d.h., die Null bezeichnet eine Gruppe mit einem durchschnittlichen Durchschnittswert.