Lineare Gemischte Modelle (5) – Anwendungen, R², Modellvergleiche

Wachstumskurvenmodelle

Wachstumskurvenmodelle

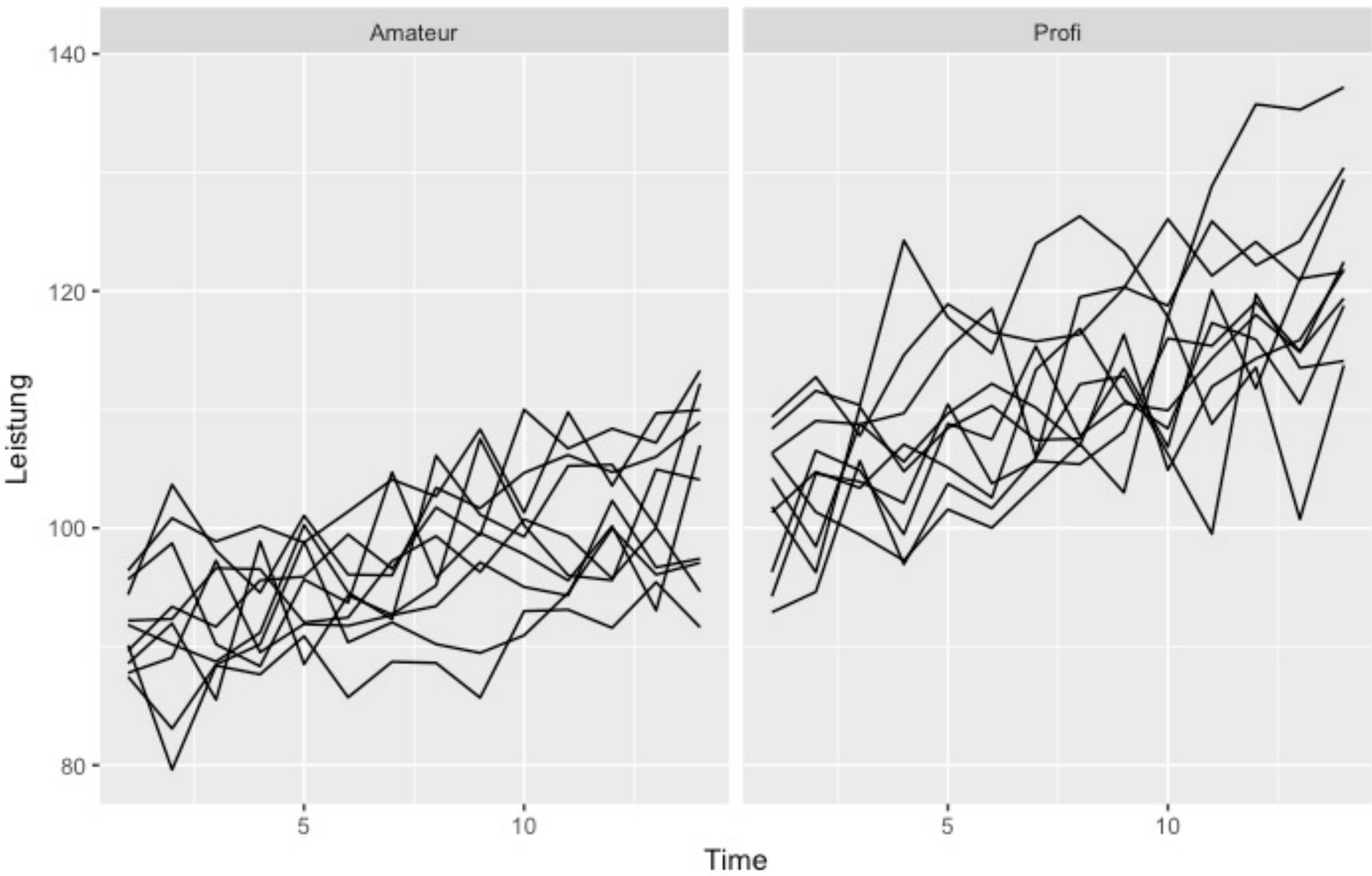
- Längsschnittanalyse: Die Zeit ist ein Prädiktor.
- Wachstumskurvenmodelle („growth curve models“)
- „the term growth curve model typically refers to statistical methods that allow for the estimation of inter-individual variability in intra-individual patterns of change over time. [...]
  In other words, growth models attempt to estimate between-person differences in within-person change.“ (Curran, Obeidat, & Losardo, 2010).
- „**estimate** between-person differences in within-person change“
  → random slopes; wie viel Variabilität ist in den slopes?
- „**explain** between-person differences in within-person change“
  → slopes-as-outcomes; kann man die Variabilität in den slopes durch einen L2-Prädiktor erklären?

Curran, P. J., Obeidat, K., & Losardo, D. (2010). Twelve frequently asked questions about growth curve modeling. *Journal of cognition and development : official journal of the Cognitive Development Society*, *11*, 121–136. doi:10.1080/15248371003699969

Wachstumskurvenmodelle

- Bei Sportler*innen wird über einen Zeitraum von 14 Tagen jeden Tag geprüft, wie sich ihre Leistung verbessert hat (simulierte Daten).
- Es gibt Profis (n = 10) und Amateur*innen (n = 10).
- **Hypothese 1**: Es lässt sich für beide Typen Leistungszuwachs feststellen.
- **Hypothese 2**: Der Zuwachs ist für Profis größer als für Amateur*innen.
- **Variablen:**
  - *Profi*: 0 = kein Profi, 1 = Profi
  - *Time.0*: 0 = 1. Tag der Messung, 13 = 14. Tag der Messung
  - *Leistung*: Leistungsmessung pro Tag pro Person

Wachstumskurvenmodelle



Wachstumskurvenmodelle

$$Leistung_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}Time_{ij} + r_{ij}$$
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Profi_j + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Profi_j + u_{1j}$$

```
Leistung ~ 1 + Profi + Time.0 + Profi:Time.0 + (1 + Time.0 | Person)
```

Anmerkungen

- Wir starten Time bei 0 und nicht bei 1, damit der Referenzpunkt der 1. MZP ist und nicht ein (nicht existierender) MZP vor der 1. Messung.
- γ_{00} und γ_{10} sind dann der Intercept/Slope für eine Person, die *Profi* = 0 ist, also eine Amateur*in.
- Damit können wir nun untersuchen, welchen **Unterschied** es auf Level 2 macht, Profi zu sein, im Vergleich zu den Amateur*innen.
- (In der Literatur werden bei Messwiederholungsdesigns die Parameter auf Level 1 häufig auch mit π bezeichnet, danach geht es auf Level 2 (Personenebene) mit β weiter.)

```
Fixed effects:
              Estimate Std. Error      df t value Pr(>|t|)    
(Intercept)    90.9221     1.3304 18.0000  68.343  < 2e-16 ***
Profi          11.6475     1.8815 18.0000   6.191 7.64e-06 ***
Time.0          0.9055     0.1159 18.0000   7.816 3.41e-07 ***
Profi:Time.0    0.4971     0.1639 18.0000   3.034  0.00714 ** 
```

$$\widehat{Leistung}_{ij} = 90.92 + 11.65 Profi_j + 0.91 Time.0_{ij} + 0.50 Profi_j Time.0_{ij}$$

$$\widehat{Leistung}_{ij} = \begin{cases} 90.92 + 0.91 Time.0_{ij} & \text{falls } Profi_j = 0, \\ (90.92 + 11.65) + (0.91 + 0.50) Time.0_{ij} & \text{falls } Profi_j = 1. \end{cases}$$

i. Die geschätzte Leistung von Amateur*innen zum Zeitpunkt Time.0 ist 90.92.

ii. Profis haben zum Zeitpunkt Time.0 eine um 11.65 Punkte (signifikant) höhere geschätzte Leistung als Amateur*innen.

iii. Der Leistungszuwachs für Amateur*innen beträgt geschätzt 0.91 Punkte pro Tag (was signifikant von Null verschieden ist).

iv. Der geschätzte Leistungszuwachs der Profis pro Tag ist signifikant um 0.50 stärker als für Amateur*innen (d.h., der *Unterschied* im slope ist signifikant von Null verschieden – der letzte Signifikanztest ist **nicht** der Test, ob der eigentliche slope der Profis von (0.91 + 0.50) signifikant von Null verschieden ist).

Modellvergleiche

Modellvergleiche

- Verbessern ein oder mehrere Terme in meiner Modellgleichung die Passung des Modells?
- Ockham Rasiermesser: Kann ich mein Modell vereinfachen? Bildet ein einfacheres Modell die Daten genauso gut ab wie ein komplexeres Modell?
- LMM: Modellvergleich per χ^2-likelihood-ratio test (LRT)
  - Voraussetzungen:
    - Geschachtelte Modelle (d.h., das einfachere Modell lässt sich durch Null-Setzung einzelner Terme des komplexeren Modells herstellen)
    - Auf den gleichen Datensatz angewendet
    - Man kann nicht ein Modell mit random effects gegen ein Modell komplett ohne random effects testen (aber durchaus ein Modell mit 2 random effects gegen das einfachere mit nur 1 random effect, usf.).
  - Wenn der χ^2-Test signifikant wird, ist das einfachere Modell (mit weniger Modellparametern) signifikant schlechter (in dem Fall bleibt man dann bei dem komplexeren).

Modellvergleiche


```
> l1 <- lmer(MathAch ~ 1 + SES + (1 | School), data=HSB)
> l2 <- lmer(MathAch ~ 1 + SES + (1 + SES | School), data=HSB)

> summary(l1)
Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 School   (Intercept)  4.768   2.184
 Residual             37.034   6.086
Number of obs: 7185, groups:  School, 160

Fixed effects:
             Estimate Std. Error        df t value Pr(>|t|)
(Intercept)   12.6575     0.1880  148.3022   67.33   <2e-16 ***
SES            2.3902     0.1057 6838.0776   22.61   <2e-16 ***
> summary(l2)
Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 School   (Intercept)  4.8287  2.1974
          SES          0.4129  0.6426   -0.11
 Residual             36.8301  6.0688
Number of obs: 7185, groups:  School, 160

Fixed effects:
            Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
(Intercept)  12.6650     0.1898 145.5479   66.71   <2e-16 ***
SES           2.3938     0.1181 157.5299   20.27   <2e-16 ***
```

Modellvergleiche


```
> l1 <- lmer(MathAch ~ 1 + SES + (1 |
> l2 <- lmer(MathAch ~ 1 + SES + (1 +

> summary(l1)
Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.De
 School   (Intercept)  4.768   2.184
 Residual             37.034   6.086
Number of obs: 7185, groups:  School, 160

Fixed effect
                                                    |t|)
(Intercept)                                        2e
SES                                                2e
> summary(l2)
Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 School   (Intercept)  4.8287  2.1974
          SES          0.4129  0.6426   -0.11
 Residual             36.8301  6.0688
Number of obs: 7185, groups:  School, 160

Fixed effects:
            Estimate Std. Error       df t value Pr(>|t|)
(Intercept)  12.6650     0.1898 145.5479   66.71   <2e-16 ***
SES           2.3938     0.1181 157.5299   20.27   <2e-16 ***
```

```
> anova(l1, l2, model.names=c("simple", "complex"))

simple: MathAch ~ 1 + SES + (1 | School)
complex: MathAch ~ 1 + SES + (1 + SES | School)
        npar   AIC   BIC logLik deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
simple     4 46649 46677 -23320    46641
complex    6 46648 46690 -23318    46636 4.5354  2     0.1035
```

Das komplexe Modell hat 2 Parameter mehr:
- **Die Random Slope Varianz**
- **Die random Intercept – random Slope Kovariant τ_{01}**

Das simplere Modell ist zu bevorzugen! (Das simplere ist nicht signifikant schlechter)

Modellvergleiche: Welches α-Niveau?

„Within the context of model selection, it is important to resist the reflex of choosing $\alpha_{LRT} = 0.05$. […] For example, choosing $\alpha_{LRT} = 0$, an infinite penalty on the model complexity is implied and consequently the minimal model is always chosen as the best, irrespective of the evidence provided by the data. Choosing $\alpha_{LRT} = 1$ implies an infinite penalty on the goodness-of-fit, and the maximal model is always chosen as the best. Therefore, choosing $\alpha_{LRT} = 0.05$ may imply an overly strong penalty on the model complexity and hence select a reduced model even if data favor a more complex one. […]

In fact, when comparing two nested models, the LRT with $\alpha_{LRT} \approx 0.157$ is equivalent to the AIC.“

- Je kleiner α, desto stärker favorisiert man simple Modelle. Je größer α, desto stärker favorisiert man komplexe Modelle.
- α = .2 wird häufig als Kompromiss gewählt.

Matuschek, H., Kliegl, R., Vasishth, S., Baayen, H., & Bates, D. (2017). Balancing Type I error and power in linear mixed models. *Journal of Memory and Language*, *94*, 305–315. https://doi.org/10.1016/j.jml.2017.01.001, p. 308

Modellvereinfachung: Welche random effects sollte man ins Modell aufnehmen?

Ansatz 1: „Keep it maximal“ (Barr et al., 2013)

- *Alle* random effects aufnehmen, die logisch Sinn ergeben.
  - Intercepts, alle random slopes von Variablen und Interaktionen, die theoretisch zwischen Units eines höheren Levels variieren können.
  - z.B. bei einer 2-Level-Struktur: Alle L1-Haupteffekte und alle Interaktionen bei denen eine L1-Variable beteiligt ist (also z.B. Interaktion zweier L1-Variablen, oder die cross-level-Interaktion von einer L1 und einer L2-Variable).
- Simulationsstudien zeigen, dass nur dann die falsch-positiv-Rate (Typ 1 Fehler) auf dem nominalen 5%-Niveau ist, wenn alle random effects aufgenommen werden. Insbesondere wenn nur random intercepts verwendet werden (und keine random slopes), dann hat man eine erhöhte Falsch-positiv-Rate für die fixed effect slopes.
- Problem 1: Das maximale Modell konvergiert oftmals nicht – wie soll man es vereinfachen um Konvergenz zu erreichen?
- Problem 2: Verringerte statistische Power, wenn es tatsächlich *keine* (oder nur sehr kleine) random variance für die slopes gibt. (Dann sollte der Parameter zwar nahe Null geschätzt werden, der zusätzliche Parameter verringert jedoch die Power, einen vorhandenen fixed effect zu entdecken).

Ansatz 2: „Parsimonious Mixed Models“ (Bates et al. 2015; Matuschek et al., 2017)

- Ziel: Falsch-positiv-Rate auf dem nominalen (z.B. 5%) Niveau kontrollieren, und *gleichzeitig* die Power erhöhen, einen vorhandenen Effekt zu entdecken.
- Methode: Durch Modellvergleiche das Modell finden, das so einfach wie möglich ist (d.h., so wenige random effects wie möglich), und gleichzeitig so komplex wie nötig, um die Daten adäquat abbilden zu können.
- „backward-selection heuristic“: Starte mit dem komplexesten Modell und nimm solange random effects heraus, bis die Reduktion bei einem LRT zu einem signifikant schlechteren Modell führt ($p < \alpha = .20$)
- Erste Reduktion: Korrelationen zwischen random effects auf Null setzen (d.h., Korrelationen zwischen random intercepts und random slopes, oder zwischen mehreren random slopes)
  - lme4-Syntax für eine random-effects-Struktur *ohne* diese Korrelationen: `( 1 + A + B || School).` (also: Doppel-Pipe: ||)
- Ab dann: schrittweise jeweils den random effect der höchsten Ordnung herausnehmen, jeweils mit dem vorherigen Modell vergleichen.
  - Also erst den random effect der Dreifachinteraktion, dann eine der beiden Zweifachinteraktionen (oder beide gleichzeitig)

Beispiel: Volles Interaktionsmodell mit 3 L1-Variablen

- Drei L1-Variablen, alle Interaktionen:
  - Sex (m/w), Minority (Ja/nein), SES (kontinuierlich)
- `m.maximal <- MathAch ~`
  - `1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES +`
  - `(1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES | School)`

fixed effects

alle random effects

```
singular fit
Warnmeldungen:
1: In commonArgs(par, fn, control, environment()) :
  maxfun < 10 * length(par)^2 is not recommended.
2: In optwrap(optimizer, devfun, getStart(start, rho$lower, rho$pp),  :
  convergence code 1 from bobyqa: bobyqa -- maximum number of function evaluations exceeded
3: Model failed to converge with 3 negative eigenvalues: -9.3e+00 -1.6e+01 -1.4e+03
> m.maximal
Linear mixed model fit by REML ['lmerModLmerTest']
Formula: MathAch ~ 1 + Sex * Minority * SES + (1 + Sex * Minority * SES |      School)
   Data: hsb
REML criterion at convergence: 46307.63
Random effects:
 Groups   Name                     Std.Dev. Corr
 School   (Intercept)              1.4549
          SexMale                  1.3243    0.15
          MinorityYes              1.5791    0.66  0.19
          SES                      0.6544   -0.76  0.45 -0.66
          SexMale:MinorityYes      0.8017   -0.69 -0.12  0.04  0.30
          SexMale:SES              1.4226    0.18 -0.78 -0.04 -0.63 -0.04
          MinorityYes:SES          1.3880    0.89 -0.15  0.39 -0.76 -0.84  0.31
          SexMale:MinorityYes:SES  2.4266   -0.41  0.75  0.05  0.72  0.43 -0.90 -0.64
 Residual                          5.9076
```

„failed to converge“: Ergebnisse *nicht* interpretieren!

Korrelationen zwischen random effects

Reduktion 1: Volle Dreifach-IA, ohne Korrelationen zwischen random effects

- `m.R1 <- MathAch ~`
  - `1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES +`
  - `(1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES || School)`

fixed effects

random effects

singular fit

mindestens 1 random effect ist ~ 0
→ Reduktionspotential!

```
Random effects:
 Groups   Name                 Variance  Std.Dev.
 School   (Intercept)          2.582e+00 1.607e+00
 School.1 Sex                  1.361e+00 1.167e+00
 School.2 Minority             3.253e+00 1.804e+00
 School.3 SES                  1.760e-13 4.195e-07
 School.4 Sex:Minority         1.089e-11 3.300e-06
 School.5 Sex:SES              1.680e-01 4.099e-01
 School.6 Minority:SES         2.724e-01 5.219e-01
 School.7 Sex:Minority:SES     0.000e+00 0.000e+00
 Residual                      3.522e+01 5.934e+00
Number of obs: 7185, groups:  School, 160
```

Reduktion 2: ohne Dreifach-IA-random effect

- `m.R2 <- MathAch ~`
  - `1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES +`
  - `(1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES || School)`

fixed effects

random effects

singular fit

mindestens 1 random effect ist ~ 0
→ Reduktionspotential!

```
Random effects:
 Groups   Name         Variance
 School   (Intercept)   2.5817
 School.1 Sex           1.3609
 School.2 Minority      3.2532
 School.3 SES           0.0000
 School.4 Sex:Minority  0.0000
 School.5 Sex:SES       0.1680
 School.6 Minority:SES  0.2724
 Residual              35.2163
```

Modellvergleich:
`anova(m.R1, m.R2)`

```
     Df   AIC   BIC logLik deviance Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
m.R2 16 46370 46480 -23169    46338
m.R1 17 46372 46489 -23169    46338     0      1          1
```

Das einfachere Modell ist nicht signifikant schlechter → wir bevorzugen das einfachere Modell

Reduktion 3: ohne Zweifach-IA-random effect Sex:Minority

- `m.R3 <- MathAch ~`
  - `1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES +`
  - `(1 + Sex + Minority + SES + Sex:SES + Minority:SES || School)`

fixed effects

random effects

singular fit

mindestens 1 random effect ist ~ 0
→ immer noch Reduktionspotential!

```
Random effects:
 Groups   Name          Variance
 School   (Intercept)    2.58172
 School.1 Sex            1.36085
 School.2 Minority       3.25317
 School.3 SES            0.00000
 School.4 Sex:SES        0.16799
 School.5 Minority:SES   0.27242
 Residual               35.21627
```

Modellvergleich:
anova(m.R2, m.R3)

```
     Df   AIC   BIC logLik deviance Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
m.R3 15 46368 46471 -23169    46338
m.R2 16 46370 46480 -23169    46338     0      1          1
```

Das einfachere Modell ist nicht signifikant schlechter → wir bevorzugen das einfachere Modell

Reduktion 4: ohne SES random effect

- `m.R4 <- MathAch ~`
  - `1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES +`
  - `(1 + Sex + Minority + Sex:SES + Minority:SES  || School)`

fixed effects

random effects

```
Random effects:
 Groups   Name         Variance
 School   (Intercept)   2.5817
 School.1 Sex           1.3609
 School.2 Minority      3.2532
 School.3 Sex:SES       0.1680
 School.4 Minority:SES  0.2724
 Residual              35.2163
```

kein singular fit mehr

Das einfachere Modell ist nicht signifikant schlechter → wir bevorzugen das einfachere Modell

Modellvergleich:
`anova(m.R3, m.R4)`

	Df	AIC	BIC	logLik	deviance	Chisq	Chi Df	Pr(>Chisq)
m.R4	14	46366	46463	-23169	46338			
m.R3	15	46368	46471	-23169	46338	0	1	1

Reduktion 5 – können wir noch weiter machen? Ohne beide Zweifach-IA-random effects

- `m.R5 <- MathAch ~`
  - `1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES +`
  - `(1 + Sex + Minority || School)`

fixed effects

random effects

```
Random effects:
 Groups   Name        Variance
 School   (Intercept)  2.577
 School.1 Sex          1.368
 School.2 Minority     3.370
 Residual             35.287
```

kein singular fit mehr

Das einfachere Modell ist nicht signifikant schlechter → wir bevorzugen das einfachere Modell

Modellvergleich:
`anova(m.R4, m.R5)`

	Df	AIC	BIC	logLik	deviance	Chisq	Chi Df	Pr(>Chisq)
m.R5	12	46363	46445	-23170	46339			
m.R4	14	46366	46463	-23169	46338	0.6098	2	0.7372

Reduktion 6 – ganz ohne random slopes?

- `m.R6 <- MathAch ~`
  - `1 + Sex + Minority + SES + Sex:Minority + Sex:SES + Minority:SES + Sex:Minority:SES +`
  - `(1 | School)`

fixed effects

random intercept

```
Random effects:
 Groups   Name        Variance
 School   (Intercept)  3.75
 Residual             35.82
```

Jetzt ist es <u>zu</u> einfach – das einfachere Modell wird signifkant schlechter ($p < .20$).

<u>Wir bleiben bei R5!</u>

Modellvergleich:
`anova(m.R5, m.R6)`

```
     Df   AIC   BIC logLik deviance  Chisq Chi Df   Pr(>Chisq)
m.R6 10 46388 46457 -23184    46368
m.R5 12 46363 46445 -23170    46339 29.361      2 0.0000004211 ***
```

Literatur

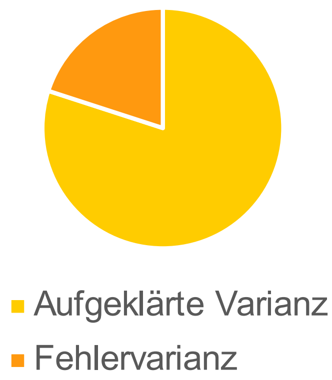
- Barr, D. J. (2013). Random effects structure for testing interactions in linear mixed-effects models. *Frontiers in Psychology*, *4*. doi:10.3389/fpsyg.2013.00328
- Barr, D. J., Levy, R., Scheepers, C., & Tily, H. J. (2013). Random effects structure for confirmatory hypothesis testing: Keep it maximal. *Journal of Memory and Language*, *68*, 255–278. doi:10.1016/j.jml.2012.11.001
- Bates, D., Kliegl, R., Vasishth, S., & Baayen, H. (2015). Parsimonious mixed models. *arXiv:1506.04967 [stat]*. Abgerufen von http://arxiv.org/abs/1506.04967
- Matuschek, H., Kliegl, R., Vasishth, S., Baayen, H., & Bates, D. (2017). Balancing Type I error and power in linear mixed models. *Journal of Memory and Language*, *94*, 305–315. doi:10.1016/j.jml.2017.01.001

R^2: Erklärte Varianz in LMMs

Varianzaufteilung

- „Klassisches“ R^2: Wie viel % der Varianz der abhängigen Variable wird durch die Prädiktoren aufgeklärt?

$$R^2 = \frac{explained\ variance}{outcome\ variance}$$



- Ein CWC(M)-zentrierter **L1-Prädiktor** kann *nur within-cluster* Varianz aufklären
- Ein **L2-Prädiktor** (entweder ein „echter“, oder der Gruppenmittelwert aus einer CWC(M)-Zentrierung) kann *nur between-cluster* Varianz aufklären

Varianzaufteilung

- In LMMs lassen sich Varianzanteile im outcome verschiedenen Kategorien zuordnen (Rights & Sterba, 2019). Annahme: Alle L1-Prädiktoren wurden CWC(M)-zentriert, es gibt nur 2 Level:
  - Varianz, die durch L1 fixed effects aufgeklärt wird ("*f1*")
  - Varianz, die durch L2 fixed effects aufgeklärt wird („*f2*")
  - Varianz, die durch Unterschiede in den Mittelwerten der Gruppen entsteht („*m*" für mean – das ist τ_{00})
  - Varianz, die durch Unterschiede in den random slopes entsteht („*v*")
  - Residualvarianz auf L1 (σ^2)

- Was kommt in den Nenner vom R^2? Nur die outcome variance, die für den interessierenden Prädiktor relevant ist. Drei Möglichkeiten:
  - total variance (also die ganze Varianz des outcomes): Subscript *t*
  - within-cluster variance: Subscript *w*
  - between-cluster variance: Subscript *b*

Rights, J. D., & Sterba, S. K. (2020). New Recommendations on the Use of R-Squared Differences in Multilevel Model Comparisons. Multivariate Behavioral Research, 55(4), 568–599. https://doi.org/10.1080/00273171.2019.1660605

Sources of variance

	Source of variance	Explanation	total	within	between
single variance source	f1	fixed effects L1	✓	✓	
	f2	fixed effects L2	✓		✓
	v	random slope variation	✓	✓	
	m	random intercept variation	✓		✓
combined variance source	f	all fixed effects (L1 + L2)	✓		
	fv	fixed effects + random slopes	✓	✓	
	fvm	fixed effects + random slopes + random intercepts	✓		

r2mlm package


```
$Decompositions
                total within between
fixed, within   0.0439 0.0536      NA
fixed, between  0.1245     NA  0.6882
slope variation 0.0063 0.0077      NA
mean variation  0.0564     NA  0.3118
sigma2          0.7689 0.9388      NA
```

$\Sigma=1$ $\Sigma=1$ $\Sigma=1$

```
$R2s
     total within between
f1   0.0439 0.0536      NA
f2   0.1245     NA  0.6882
v    0.0063 0.0077      NA
m    0.0564     NA  0.3118
f    0.1684     NA      NA
fv   0.1747 0.0612      NA
fvm  0.2311     NA      NA
```

r2mlm package

```
$R2s
     total within between
f1  0.0439 0.0536      NA
f2  0.1245     NA  0.6882
v   0.0063 0.0077      NA
m   0.0564     NA  0.3118
f   0.1684     NA      NA
fv  0.1747 0.0612      NA
fvm 0.2311     NA      NA
```

- SES.gc (L1-Prädiktor) klärt 5.36% der within-Varianz auf ($R_w^{2\,(f_1)}$)
  - Da dieser Prädiktor ja ausschließlich within-Varianz erklären kann, könnte man argumentieren, dass man ihn auch nur an der within-Varianz relativieren sollte.
- SES.gmc (L2-Prädiktor) klärt 68.82% der between-Varianz auf ($R_b^{2\,(f_2)}$)
  - Da dieser Prädiktor ja ausschließlich between-Varianz erklären kann, könnte man argumentieren, dass man ihn auch nur an der between-Varianz relativieren sollte.
- SES.gmc (L2-Prädiktor) klärt 12.45% der Gesamtvarianz auf ($R_t^{2\,(f_2)}$)
- **Die fixed effects von allen Prädiktoren klären 16.84% der Gesamtvarianz auf ($R_t^{2\,(f)}$)**
  - Dieses R² wurde früher „marginal R²“ genannt und wird am häufigsten berichtet:
    Die gesamte Varianzaufklärung aller fixed effects. Das ist am ehesten äquivalent zum R² einer single-level Regression.

r2mlm package