11. Vorlesung Statistik I

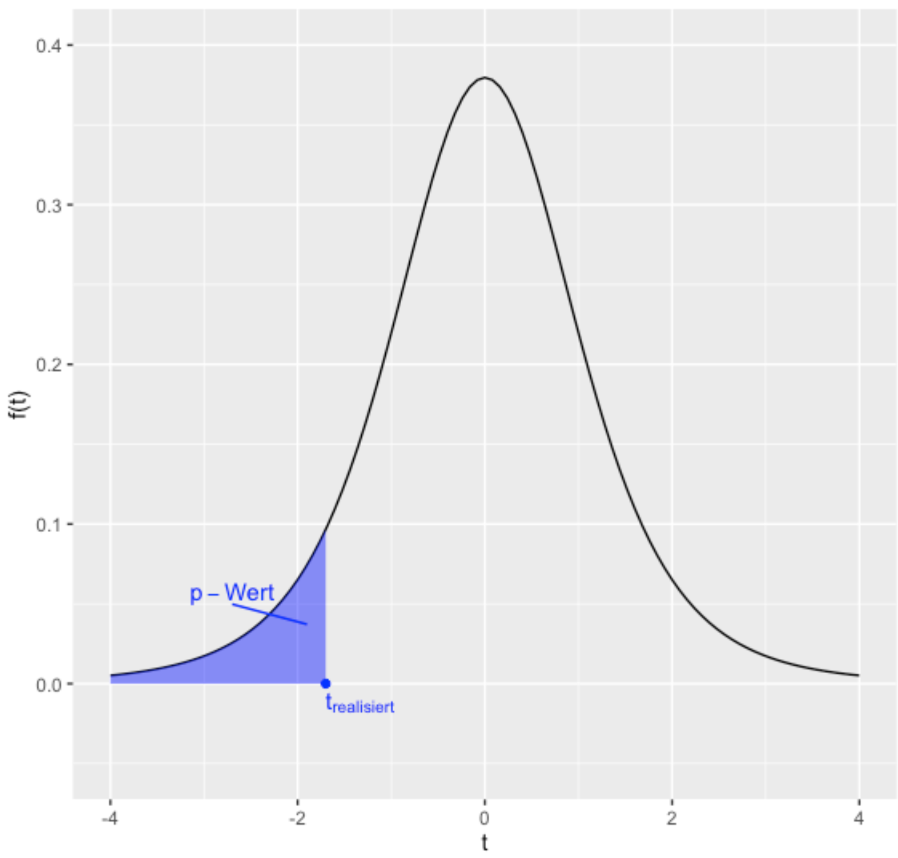
Einführung in statistische Hypothesentests II

Wdh.: Statistische Hypothesentests

- Wiederholung Vorgehen bei statistischen Hypothesentests:
  - Wir geben ein (geringes) Signifikanzniveau α vor, welches der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art entspricht.
  - Wir wählen eine geeignete Teststatistik.
  - Wir bestimmen auf der Basis von α den kritischen Bereich.
  - Wir berechnen die Realisation der Teststatistik.
  - Wir entscheiden uns
    - für die H_0, falls die Realisation der Teststatistik nicht im kritischen Bereich liegt,
    - für die H_1, falls die Realisation der Teststatistik im kritischen Bereich liegt.

p-Werte

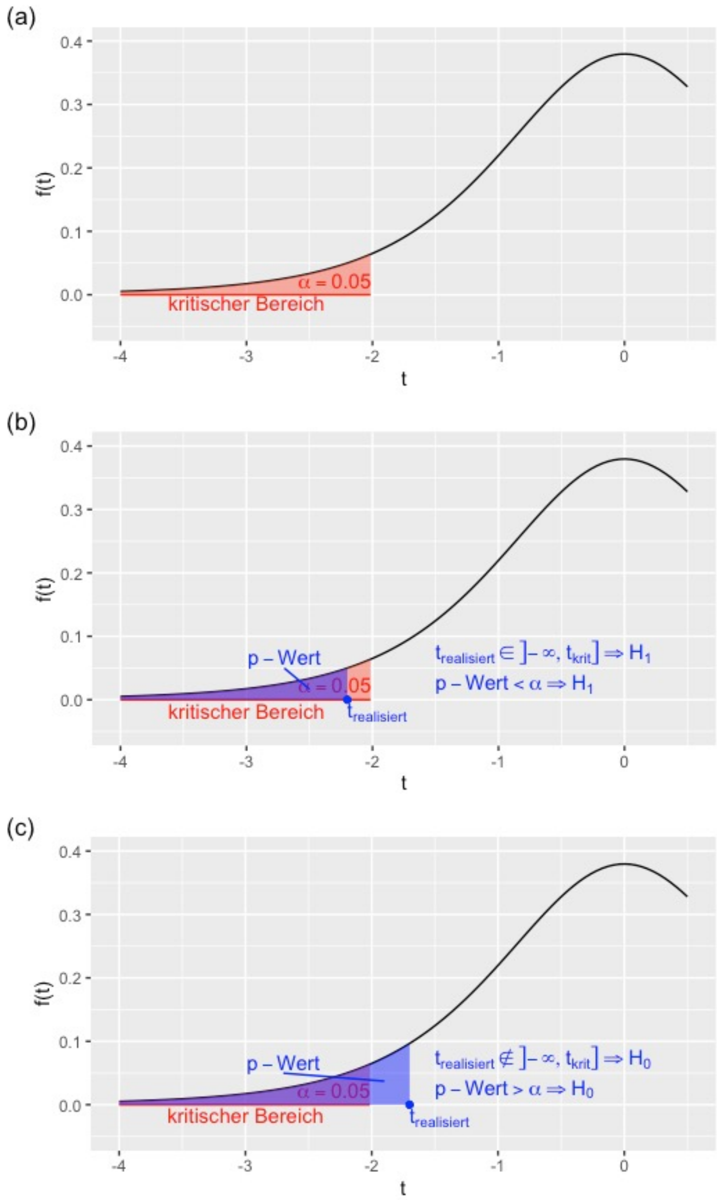
Definition p-Wert



Teststatistik und p-Wert für $\mu = \mu_0$ bei linksseitiger Alternativhypotese.

- Eine alternative Methode, um im Rahmen statistischer Hypothesentests zu einer Testentscheidung zu gelangen, ist die Berechnung des p-Werts.
- Der **p-Wert** ist (etwas vereinfacht) die maximale Wahrscheinlichkeit unter der H_0 dafür, dass sich die Teststatistik in der beobachteten Realisation oder einer extremeren Realisation in Richtung der H_1 realisiert.
- Wie der p-Wert konkret berechnet wird, unterscheidet sich je nach Art des statistischen Hypothesentests.

p-Werte und kritische Bereiche



- Wichtige Eigenschaft des p-Werts: Die Realisation einer Teststatistik liegt genau dann in dem auf der Basis eines Signifikanzniveaus α berechneten kritischen Bereich, falls der p-Wert kleiner oder gleich α ist.

- Das heißt also:

  - Falls der p-Wert kleiner oder gleich α ist, wissen wir, dass die Realisation der Teststatistik im kritischen Bereich liegt und können uns für die H_1 entscheiden (Abb. b).

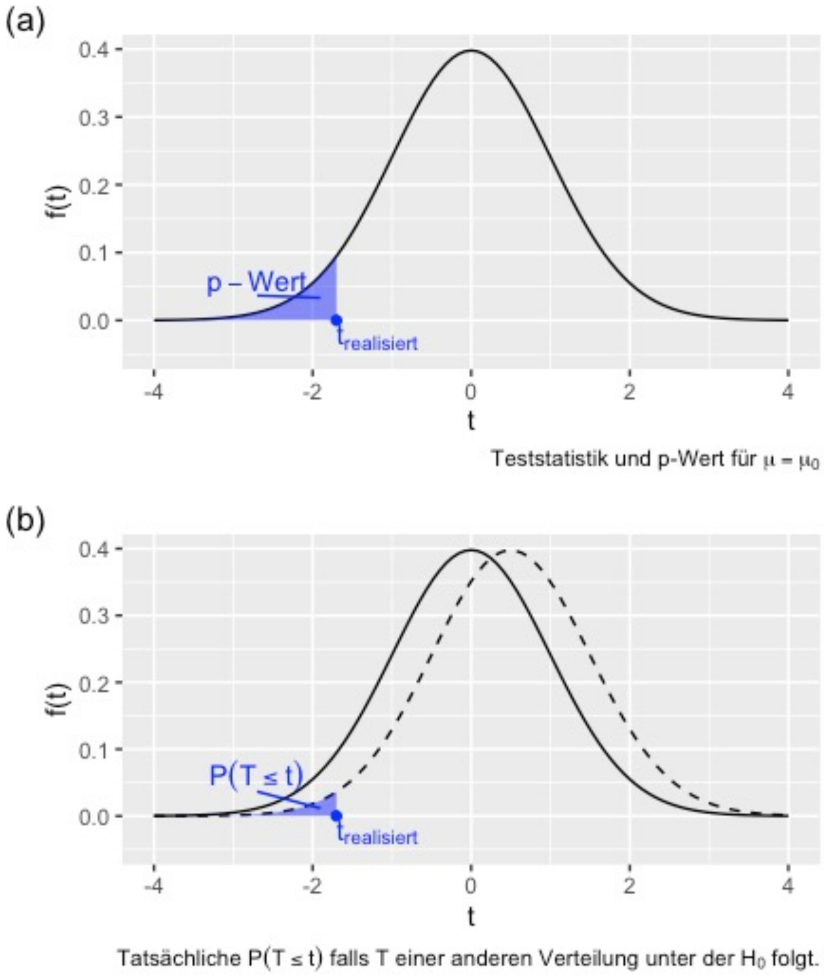
  - Falls der p-Wert größer als α ist, wissen wir, dass die Realisation der Teststatistik nicht im kritischen Bereich liegt und wir können uns für die H_0 entscheiden (Abb. c).

- Dies gilt für alle statistischen Hypothesentests.

p-Wert und Testentscheidung

- Wir können unsere Testentscheidung statt auf der Basis von kritischen Bereichen alternativ also auch auf der Basis des p-Werts treffen:
  - Falls der **p-Wert kleiner oder gleich $\boldsymbol{\alpha}$** ist, **entscheiden wir uns für die $\boldsymbol{H_1}$**.
  - Falls der **p-Wert größer als $\boldsymbol{\alpha}$** ist, **entscheiden wir uns für die $\boldsymbol{H_0}$**.
- In diesem Fall müssen wir den kritischen Bereich gar nicht berechnen.
- In den meisten Statistikprogrammen – auch in R - wird standardmäßig nur der p-Wert und nicht der kritische Bereich ausgegeben.
- Wichtig: Die Berechnung des p-Werts und und die Berechnung des kritischen Bereichs sind lediglich zwei alternative Methoden, um zu einer Testentscheidung zu gelangen. Es ist im Prinzip egal, welche Methode man verwendet, da in beiden Fällen immer die gleiche Testentscheidung resultiert: Es ist unmöglich, dass man sich bei einem gegebenen α und einer gegebenen Stichprobe z.B. auf der Basis des p-Werts für die H_0 und auf der Basis des kritischen Bereichs für die H_1 entscheiden würde.

Berechnung des p-Werts bei linksgerichteter H_1 für μ I



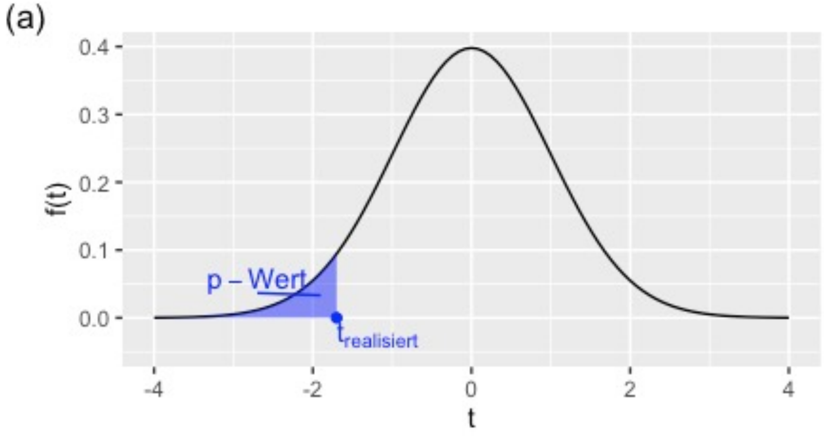
- Im Fall einer **linksgerichteten** $H_1: \mu < \mu_0$ sind mit den „extremeren Realisationen in Richtung der H_1" alle Werte **links** von der beobachteten Realisation t der Teststatistik T gemeint.

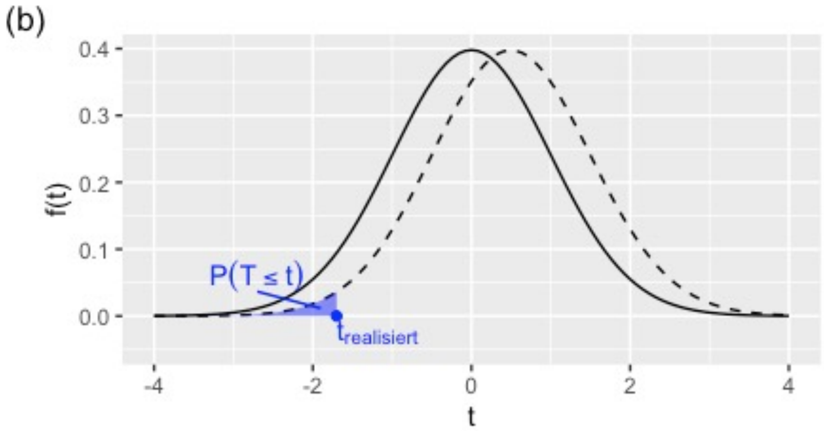
- Der p-Wert ist also in diesem Fall die **maximale** Wahrscheinlichkeit unter der H_0 für das Ereignis $T \leq t$.

- Was heißt „maximal"?

- **Zur Erinnerung**:
  Die Teststatistik hat unter jedem möglichen Parameterwert unter der $H_0: \mu \geq \mu_0$,
  also für alle Parameterwerte größer oder gleich μ_0 eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung unter der jeweils eine andere Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $T \leq t$ resultieren würde.

Berechnung des p-Werts bei linksgerichteter H_1 für μ II



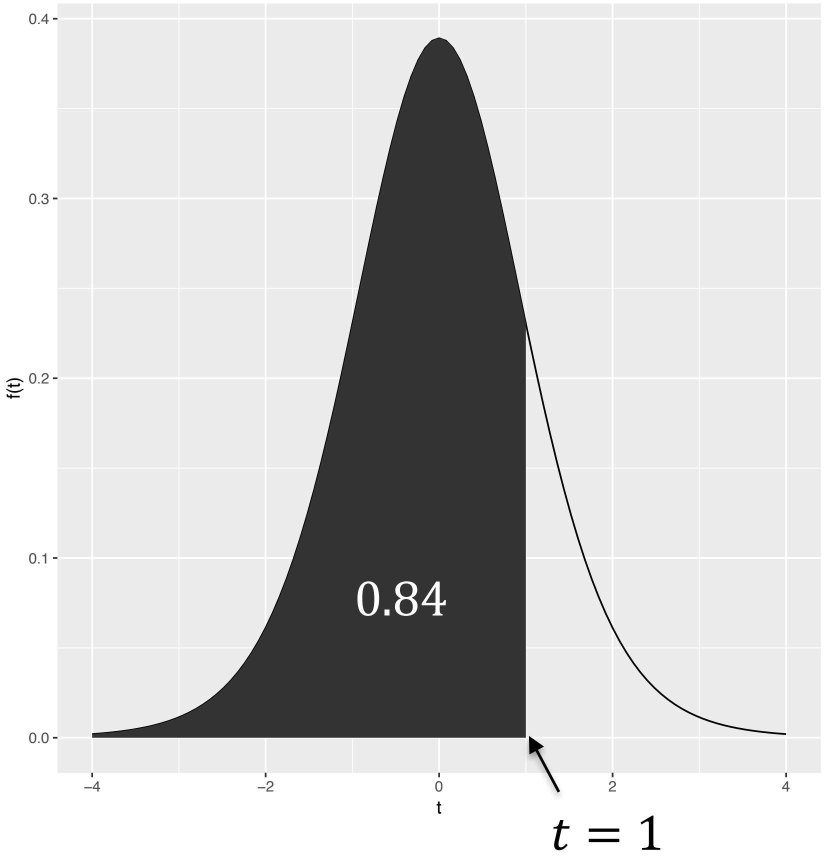


- Man kann zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für $T \leq t$ maximal ist, falls $\mu = \mu_0$ ist.
- Praktischerweise können wir genau für diesen Parameterwert die Wahrscheinlichkeit für $T \leq t$ sehr einfach berechnen, da wir wissen, dass die Teststatistik unter der Voraussetzung $\mu = \mu_0$ einer t-Verteilung mit $\nu = n - 1$ folgt (siehe z.B. VL 10, Folie 61).
- Der p-Wert im Fall einer linksgerichteten $H_1: \mu < \mu_0$ ist also

$$P(T \leq t)$$

wobei P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n - 1$, ist und t die beobachtete Realisation der Teststatistik in unserer Stichprobe.

Berechnung des p-Werts bei linksgerichteter H_1 für μ III



- Falls die Realisation der Teststatistik in einer Stichprobe der Größe $n = 1000$ z.B. $t = 1$ ist, ist der p-Wert

  $$P(T \leq t) = P(T \leq 1) = F(1)$$

  wobei P die Wahrscheinlichkeits-verteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n - 1 = 999$, ist und F deren Verteilungsfunktion.
- Berechnung in R:

```
> pt(1, 999)
[1] 0.8412237
```

Berechnung des p-Werts bei rechtsgerichteter H_1 für μ I

- Im Fall einer **rechtsgerichteten** $H_1: \mu > \mu_0$ sind mit den „extremeren Realisationen in Richtung der H_1" alle Werte **rechts** von der beobachteten Realisation t der Teststatistik T gemeint.

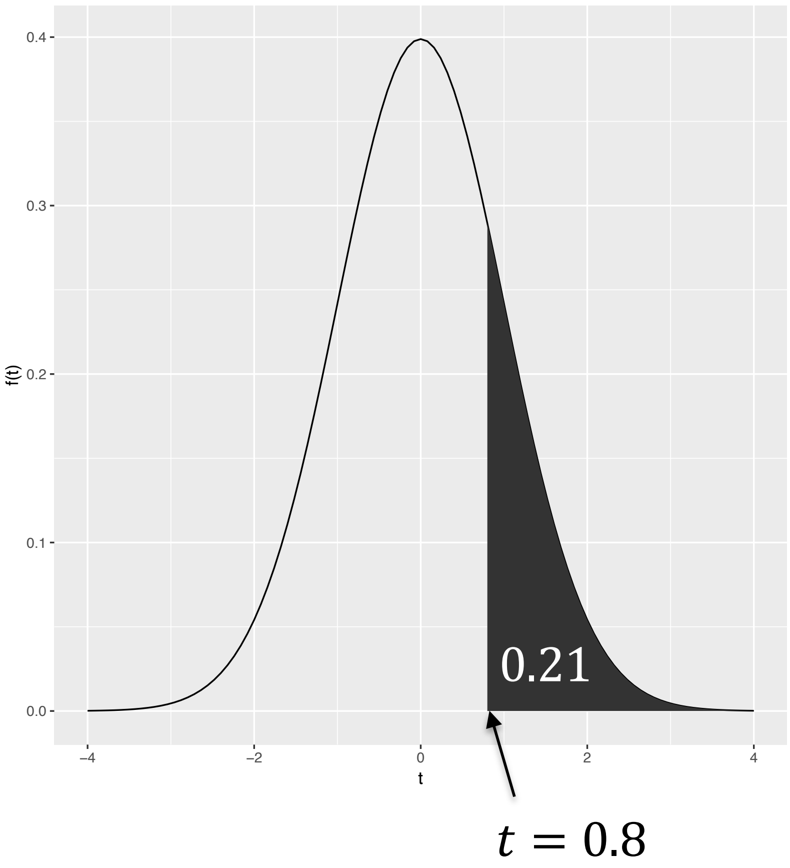
- Der p-Wert ist also in diesem Fall die maximale Wahrscheinlichkeit unter der H_0 für das Ereignis $T \geq t$.

- Der p-Wert im Fall einer rechtsgerichteten $H_1: \mu > \mu_0$ ist somit aus den gleichen Gründen wie im linksgerichteten Fall

$$P(T \geq t)$$

wobei P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n - 1$, ist und t die beobachtete Realisation der Teststatistik in unserer Stichprobe.

Berechnung des p-Werts bei rechtsgerichteter H_1 für μ II



- Falls die Realisation der Teststatistik in einer Stichprobe der Größe $n = 1000$ z.B. $t = 0.8$ ist, ist der p-Wert

  $$P(T \geq t) = P(T \geq 0.8) = 1 - F(0.8)$$

  wobei P die Wahrscheinlichkeits-verteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n - 1 = 999$, ist und F deren Verteilungsfunktion.

- Berechnung in R:

```
> 1 - pt(0.8, 999)
[1] 0.2119505
```

Berechnung des p-Werts bei ungerichteter H_1 für μ I

- Im Fall einer **ungerichteten** $H_1: \mu \neq \mu_0$ sind mit den „extremeren Realisationen in Richtung der H_1" alle Werte gemeint, die **im Betrag größer** als die beobachtete Realisation t der Teststatistik T sind.

- Der p-Wert ist also in diesem Fall die maximale Wahrscheinlichkeit unter der H_0 für das Ereignis

$$T \leq -|t| \text{ oder } T \geq |t|$$

- Im Fall von ungerichteten Hypothesen gibt es nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik unter der H_0, nämlich diejenige für $\mu = \mu_0$. Da es daher auch nur eine Wahrscheinlichkeit für die beobachtete Realisation oder eine extremere Realisation in Richtung der H_1 gibt, ist diese auch gleichzeitig die maximale.

Berechnung des p-Werts bei ungerichteter H_1 für μ II

- Der p-Wert im Fall einer ungerichteten $H_1\colon \mu \neq \mu_0$ ist damit

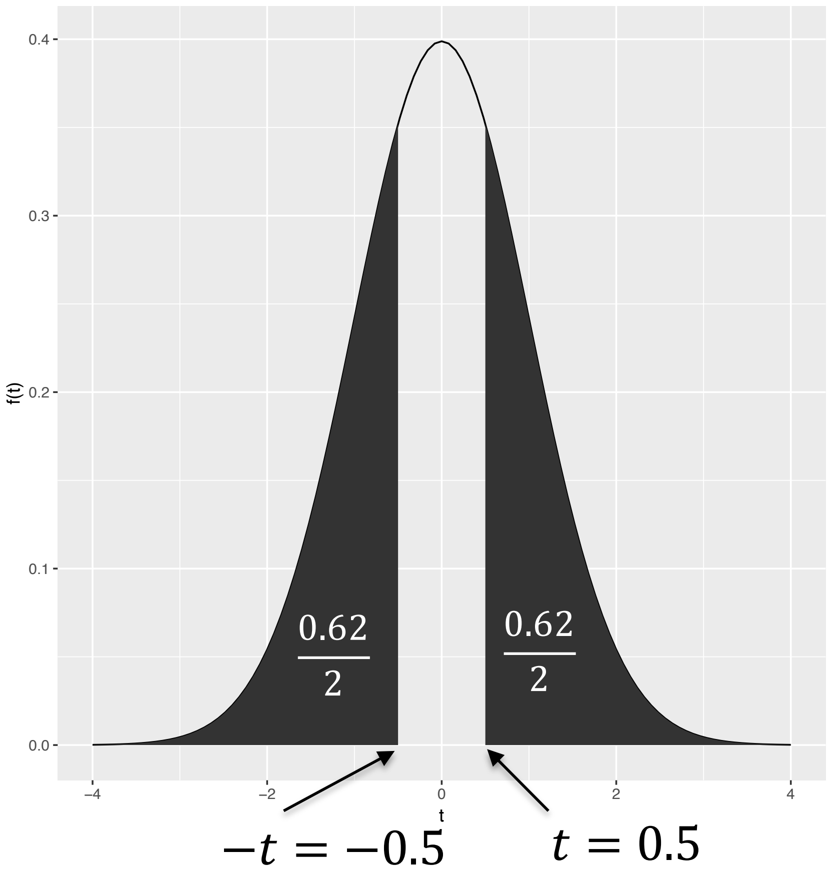
$$P(T \leq -|t| \text{ oder } T \geq |t|) = P(T \leq -|t|) + P(T \geq |t|)$$

wobei P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n - 1$, ist und t die beobachtete Realisation der Teststatistik in unserer Stichprobe.

- Hinweis: Aufgrund der Symmetrie der t-Verteilung um 0 ist

$$P(T \leq -|t|) + P(T \geq |t|) = 2 \cdot P(T \leq -|t|)$$

Berechnung des p-Werts bei ungerichteter H_1 für μ III



- Falls die Realisation der Teststatistik in einer Stichprobe der Größe $n = 1000$ z.B. $t = 0.5$ ist, ist der p-Wert

  $$2 \cdot P(T \leq -|t|) = 2 \cdot P(T \leq -0.5)$$
  $$= 2 \cdot F(-0.5)$$

  wobei P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n - 1 = 999$, ist und F deren Verteilungsfunktion.

- Berechnung in R:

```
> 2 * pt(-0.5, 999)
[1] 0.6171852
```

Vorsicht!
Häufige Fehlinterpretationen von p-Werten

- Wir verwenden p-Werte ausschließlich als Hilfsmittel für Testentscheidungen.
- Der konkrete p-Wert sollte nicht über „maximale Wahrscheinlichkeit unter der H_0 dafür, dass sich die Teststatistik in der beobachteten Realisation oder einer extremeren Realisation in Richtung der H_1 realisiert“ hinaus interpretiert werden!
- Unter anderem bedeutet ein kleiner p-Wert **NICHT**:
  - dass die „Wahrscheinlichkeit“, dass die H_0 wahr ist, klein ist.
  - dass wir davon ausgehen können, dass μ weit weg von μ_0 liegt.
  - dass die Wahrscheinlichkeit hoch ist, dass sich bei Wiederholung des Zufallsexperiments – also bei wiederholter Ziehung einer einfachen Zufallsstichprobe – wieder ein signifikantes Ergebnis ergibt.

Beispiel I

- Aus unserer Theorie folgt, dass der durchschnittliche IQ $\bar{x}_{IQ\_Pop}$ in der Population der Studierenden größer als 100 sein sollte.

- In diesem Fall ist $\mu_0 = 100$ und die inhaltlichen Hypothesen lauten:

$$H_0: \bar{x}_{IQ\_Pop} \leq 100$$

$$H_1: \bar{x}_{IQ\_Pop} > 100$$

- Wir nehmen an, dass das Histogramm des IQ in der Population der Studierenden durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung approximiert werden kann und ziehen eine einfache Zufallsstichprobe der Größe $n = 500$.

- In diesem Fall ist $\bar{x}_{IQ\_Pop} = \mu$ und wir erhalten die folgenden statistischen Hypothesen:

$$H_0: \mu \leq 100$$

$$H_1: \mu > 100$$

Beispiel II

- Unsere Teststatistik ist

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{\bar{X} - 100}{\sqrt{\frac{S^2}{500}}}$$

und wir wissen, dass diese Teststatistik im Fall von $\mu = \mu_0 = 100$ einer t-Verteilung mit

$$\nu = n - 1 = 500 - 1 = 499$$

folgt.

Beispiel III

- Um die Realisation

$$t = \frac{\bar{x} - 100}{\sqrt{\frac{s^2}{500}}}$$

der Teststatistik

$$T = \frac{\bar{X} - 100}{\sqrt{\frac{S^2}{500}}}$$

berechnen zu können, benötigen wir die Schätzwerte $\bar{x}$ und s^2.

Beispiel IV

- Beispielsweise könnte sich in unserer Stichprobe $\bar{x} = 110$ und $s^2 = 250$ ergeben.

- Die Realisation der Teststatistik wäre dann

$$t = \frac{\bar{x} - 100}{\sqrt{\frac{s^2}{500}}} = \frac{110 - 100}{\sqrt{\frac{250}{500}}} \approx 14.14$$

Beispiel V

- Wir wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.005$.
- Da wir eine rechtsgerichtete H_1 vorliegen haben, ist der p-Wert die Wahrscheinlichkeit für $T \geq 14.14$ unter der Voraussetzung, dass $\mu = \mu_0$ ist.
- Der p-Wert ist daher gleich

$$P(T \geq 14.14) = 1 - P(T \leq 14.14) = 1 - F(14.14)$$

wobei P eine t-Verteilung mit $\nu = 499$ ist und F deren Verteilungsfunktion.

- Berechnung in R:

```
> 1 - pt(14.14, 499)
[1] 0
```

- Der p-Wert ist 0 (bis auf sehr viele Nachkommastellen) und somit kleiner als $\alpha = 0.005$. Wir entscheiden uns daher für die statistische Alternativhypothese $\mu > 100$ und somit auch für die inhaltliche Alternativhypothese $\bar{x}_{IQ\_Pop} > 100$.
- Dies bedeutet, dass wir uns dafür entscheiden, unsere Theorie nicht zu falsifizieren.

Weitere statistische Hypothesentests

Weitere statistische Hypothesentests

- Wir werden nun weitere statistische Hypothesentests besprechen.
- Diese unterscheiden sich je nach
    - statistischer Null- und Alternativhypothese, zwischen denen eine Entscheidung getroffen werden soll,
    - Teststatistik,
    - Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik, die für die Berechnung des kritischen Bereichs oder des p-Werts verwendet wird,
    - Lage des kritischen Bereichs bzw. der Fläche, die dem p-Wert entspricht.
- Das grundlegende Prinzip und Vorgehen ist jedoch in allen Fällen identisch.

Hypothesentests für **ungerichtete** statistische Hypothesen über $\mu_1 - \mu_2$ bei **unabhängigen** Stichproben

Inhaltliche Hypothesen

- Wir wollen überprüfen, ob die Differenz der Mittelwerte einer stetigen Variable in zwei Populationen ungleich einem bestimmten Wert ist.

- Inhaltliche Hypothesen:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} = \mu_0$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} \neq \mu_0$$

- Spezialfall $\mu_0 = 0$: Wir wollen überprüfen, ob sich zwei Populationen in ihrem Mittelwert auf einer stetigen Variable unterscheiden:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} = 0$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} \neq 0$$

bzw.:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} = \bar{x}_{Pop\_2}$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} \neq \bar{x}_{Pop\_2}$$

Statistische Hypothesen

- Wir nehmen an, dass das Histogramm der Variable in beiden Population durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung approximiert werden kann und die empirische Varianz der Variable in beiden Populationen gleich ist.

- Wir haben zwei **unabhängige** einfache Zufallsstichproben aus den beiden Populationen mit Stichprobenumfängen n_1 und n_2 vorliegen.

- Dann lauten die statistischen Hypothesen:

$$H_0\colon\ \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$$

$$H_1\colon\ \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$$

Teststatistik

- Die Teststatistik ist in diesem Fall:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_{pool}^2}{n_1} + \frac{S_{pool}^2}{n_2}}}$$

- Sie folgt unter der H_0 einer t-Verteilung mit $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Kritischer Bereich

- Auf der Basis dieser t-Verteilung können wir die kritischen Werte und somit den kritischen Bereich berechnen:

$$K_T =]-\infty, t_{krit\_links}] \cup [t_{krit\_rechts}, +\infty[$$

wobei t_{krit_links} derjenige Wert ist, für den unter dieser t-Verteilung

$$P(T \leq t_{krit\_links}) = F(t_{krit\_links}) = \frac{\alpha}{2}$$

und $t_{krit\_rechts} = -t_{krit\_links}$ ist.

p-Wert

- Der p-Wert ist

$$P(T \leq -|t| \text{ oder } T \geq |t|) = 2 \cdot P(T \leq -|t|) = 2 \cdot F(-|t|)$$

wobei P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n_1 + n_2 - 2$, ist, F deren Verteilungsfunktion und t die beobachtete Realisation der Teststatistik in unserer Stichprobe.

- Bemerkung: Der gerade besprochene statistische Hypothesentest wird **Zweistichproben t-Test für unabhängige Stichproben für ungerichtete Hypothesen über $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$** genannt.

Hypothesentests für **gerichtete** statistische Hypothesen über $\mu_1 - \mu_2$ bei **unabhängigen** Stichproben

Inhaltliche Hypothesen I

- Wir wollen überprüfen, ob die Differenz der Mittelwerte einer stetigen Variable in zwei Populationen größer oder kleiner als ein bestimmter Wert ist.

- Inhaltliche Hypothesen:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} \geq \mu_0$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} < \mu_0$$

oder

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} \leq \mu_0$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} > \mu_0$$

Inhaltliche Hypothesen II

- Spezialfall $\mu_0 = 0$: Wir wollen überprüfen, ob der Mittelwert einer stetigen Variable in einer Population größer oder kleiner als in einer anderen Population ist:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop1} \geq \bar{x}_{Pop\_2}$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} < \bar{x}_{Pop\_2}$$

oder:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} \leq \bar{x}_{Pop\_2}$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} > \bar{x}_{Pop\_2}$$

Statistische Hypothesen

- Wir nehmen an, dass das Histogramm der Variable in beiden Population durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung approximiert werden kann und die empirische Varianz der Variable in beiden Populationen gleich ist.

- Wir haben zwei **unabhängige** einfache Zufallsstichproben aus den beiden Populationen mit Stichprobenumfängen n_1 und n_2 vorliegen.

- Dann lauten die statistischen Hypothesen:

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$$

$$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$$

oder

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$$

$$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$$

Teststatistik

- Die Teststatistik ist in diesem Fall genau wie bei ungerichteten Hypothesen:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2_{pool}}{n_1} + \frac{S^2_{pool}}{n_2}}}$$

- Sie folgt unter der Voraussetzung $\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ einer t-Verteilung mit $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Kritischer Bereich

- Auf der Basis dieser t-Verteilung können wir die kritischen Werte und somit den kritischen Bereich berechnen.

- Linksseitige Alternativhypothese:

$$K_T =]-\infty, t_{krit}]$$

wobei t_{krit} derjenige Wert ist, für den unter dieser t-Verteilung gilt:

$$P(T \leq t_{krit}) = F(t_{krit}) = \alpha$$

- Rechtsseitige Alternativhypothese:

$$K_T = [t_{krit}, +\infty[$$

wobei t_{krit} derjenige Wert ist, für den unter dieser t-Verteilung gilt:

$$P(T \geq t_{krit}) = 1 - F(t_{krit}) = \alpha$$

p-Wert

- Der p-Wert ist im Fall einer linksseitigen Alternativhypothese

$$P(T \leq t\ ) = F(t)$$

- Im Fall einer rechtsseitigen Alternativhypothese ist er

$$P(T \geq t\ ) = 1 - F(t)$$

- Hierbei ist P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n_1 + n_2 - 2$, F deren Verteilungsfunktion und t die beobachtete Realisation der Teststatistik in unserer Stichprobe.

- Bemerkung: Der gerade besprochene statistische Hypothesentest wird **Zweistichproben t-Test für unabhängige Stichproben für gerichtete Hypothesen über $\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2}$** genannt.

Hypothesentests für **ungerichtete** statistische Hypothesen über $\mu_1 - \mu_2$ bei **abhängigen** Stichproben

Inhaltliche Hypothesen

- Wir wollen überprüfen, ob die Differenz der Mittelwerte einer stetigen Variable in zwei Populationen ungleich einem bestimmten Wert ist.

- Inhaltliche Hypothesen:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} = \mu_0$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} \neq \mu_0$$

- Spezialfall $\mu_0 = 0$: Wir wollen überprüfen, ob sich zwei Populationen in ihrem Mittelwert auf einer stetigen Variable unterscheiden:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} = 0$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} \neq 0$$

bzw.:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} = \bar{x}_{Pop\_2}$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} \neq \bar{x}_{Pop\_2}$$

Statistische Hypothesen

- Wir nehmen an, dass das Histogramm der Variable in beiden Population durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung approximiert werden kann.

- Wir haben zwei **abhängige** einfache Zufallsstichproben aus den beiden Populationen mit einem Stichprobenumfang von jeweils n vorliegen.

- Dann lauten die statistischen Hypothesen:

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$$

$$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$$

Teststatistik

- Die Teststatistik ist in diesem Fall:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_{Diff}^2}{n}}}$$

- Sie folgt unter der H_0 einer t-Verteilung mit $\nu = n - 1$.

Kritischer Bereich

- Auf der Basis dieser t-Verteilung können wir die kritischen Werte und somit den kritischen Bereich berechnen:

$$K_T =]-\infty, t_{krit\_links}] \cup [t_{krit\_rechts}, +\infty[$$

wobei t_{krit_links} derjenige Wert ist, für den unter dieser t-Verteilung

$$P(T \leq t_{krit\_links}) = F(t_{krit\_links}) = \frac{\alpha}{2}$$

und $t_{krit\_rechts} = -t_{krit\_links}$ ist.

p-Wert

- Der p-Wert ist

$$P(T \leq -|t| \text{ oder } T \geq |t|) = 2 \cdot P(T \leq -|t|) = 2 \cdot F(-|t|)$$

wobei P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n - 1$, ist, F deren Verteilungsfunktion und t die beobachtete Realisation der Teststatistik in unserer Stichprobe.

- Bemerkung: Der gerade besprochene statistische Hypothesentest wird **Zweistichproben t-Test für abhängige Stichproben für ungerichtete Hypothesen über $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$** genannt.

Hypothesentests für **gerichtete** statistische Hypothesen über $\mu_1 - \mu_2$ bei **abhängigen** Stichproben

Inhaltliche Hypothesen I

- Wir wollen überprüfen, ob die Differenz der Mittelwerte einer stetigen Variable in zwei Populationen größer oder kleiner als ein bestimmter Wert ist.

- Inhaltliche Hypothesen:

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} \geq \mu_0$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} < \mu_0$$

oder

$$H_0\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} \leq \mu_0$$

$$H_1\colon \bar{x}_{Pop\_1} - \bar{x}_{Pop\_2} > \mu_0$$

Inhaltliche Hypothesen II

- Spezialfall $\mu_0 = 0$: Wir wollen überprüfen, ob der Mittelwert einer stetigen Variable in einer Population größer oder kleiner als in einer anderen Population ist:

$$H_0\text{: } \bar{x}_{Pop\_1} \geq \bar{x}_{Pop\_2}$$

$$H_1\text{: } \bar{x}_{Pop\_1} < \bar{x}_{Pop\_2}$$

oder:

$$H_0\text{: } \bar{x}_{Pop\_1} \leq \bar{x}_{Pop\_2}$$

$$H_1\text{: } \bar{x}_{Pop\_1} > \bar{x}_{Pop\_2}$$

Statistische Hypothesen

- Wir nehmen an, dass das Histogramm der Variable in beiden Population durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung approximiert werden kann.

- Wir haben zwei **abhängige** einfache Zufallsstichproben aus den beiden Populationen mit einem Stichprobenumfang von jeweils n vorliegen.

- Dann lauten die statistischen Hypothesen:

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$$

$$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$$

oder

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$$

$$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$$

Teststatistik

- Die Teststatistik ist in diesem Fall:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_{Diff}^2}{n}}}$$

- Sie folgt unter der Voraussetzung $\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ einer t-Verteilung mit $\nu = n - 1$.

Kritischer Bereich

- Auf der Basis dieser t-Verteilung können wir die kritischen Werte und somit den kritischen Bereich berechnen.

- Linksseitige Alternativhypothese:

$$K_T =]-\infty, t_{krit}]$$

wobei t_{krit} derjenige Wert ist, für den unter dieser t-Verteilung gilt:

$$P(T \leq t_{krit}) = F(t_{krit}) = \alpha$$

- Rechtsseitige Alternativhypothese:

$$K_T = [t_{krit}, +\infty[$$

wobei t_{krit} derjenige Wert ist, für den unter dieser t-Verteilung gilt:

$$P(T \geq t_{krit}) = 1 - F(t_{krit}) = \alpha$$

p-Wert

- Der p-Wert ist im Fall einer linksseitigen Alternativhypothese

$$P(T \leq t\ ) = F(t)$$

- Im Fall einer rechtsseitigen Alternativhypothese ist er

$$P(T \geq t\ ) = 1 - F(t)$$

- Hierbei ist P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\mu_1 - \mu_2 \ = \mu_0$, also eine t-Verteilung mit $\nu = n - 1$, F deren Verteilungsfunktion und t die beobachtete Realisation der Teststatistik in unserer Stichprobe.

- Bemerkung: Der gerade besprochene statistische Hypothesentest wird **Zweistichproben t-Test für abhängige Stichproben für gerichtete Hypothesen über $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$** genannt.

Hypothesentests für **gerichtete** statistische Hypothesen über π

Inhaltliche Hypothesen

- Wir wollen überprüfen, ob die relative Häufigkeit einer Messwertausprägung einer diskreten Variable in einer Population größer oder kleiner als ein bestimmter Wert π_0 ist.

- Inhaltliche Hypothesen:

$$H_0: h \leq \pi_0$$

$$H_1: h > \pi_0$$

oder:

$$H_0: h \geq \pi_0$$

$$H_1: h < \pi_0$$

Statistische Hypothesen

- Wir haben eine einfache Zufallsstichprobe aus der Population mit Stichprobenumfang n vorliegen.

- Dann lauten die statistischen Hypothesen:

$$H_0: \pi \leq \pi_0$$

$$H_1: \pi > \pi_0$$

oder:

$$H_0: \pi \geq \pi_0$$

$$H_1: \pi < \pi_0$$

Teststatistik

- Die Teststatistik ist in diesem Fall:

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Sie entspricht der absoluten Häufigkeit der interessierenden Messwertausprägung in der Stichprobe und folgt unter der Voraussetzung $\pi = \pi_0$ einer **Binomialverteilung** mit Parametern π_0 und n.

p-Wert

- Der p-Wert ist im Fall einer linksseitigen Alternativhypothese

$$P(T \leq t) = F(t)$$

- Im Fall einer rechtsseitigen Alternativhypothese ist er

$$P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = 1 - P(T \leq t - 1) = 1 - F(t - 1)$$

- Hierbei ist P die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik T unter der Voraussetzung $\pi = \pi_0$, also eine Binomialverteilung mit Parametern π_0 und n, F deren Verteilungsfunktion und t die beobachtete Realisation der Teststatistik in unserer Stichprobe.

- Bemerkung: Da die Binomialverteilung eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, ist in der Gleichung oben $P(T < t)$ nicht wie im stetigen Fall gleich $P(T \leq t)$, sondern gleich $P(T \leq t - 1)$.

Bemerkungen

- Der gerade besprochene statistische Hypothesentest wird **Binomialtest für gerichtete Hypothesen über $\boldsymbol{\pi}$** genannt.

- Bemerkung: Wir haben die Berechnung des kritischen Bereichs beim Binomialtest ausgelassen, da wir aufgrund der Diskretheit der Teststatistik nur für bestimmte Signifikanzniveaus α einen exakten kritischen Bereich berechnen können. Aus diesem Grund wird die Testentscheidung im Rahmen des Binomialtests praktisch fast immer mithilfe des p-Werts getroffen.

Hypothesentests für **ungerichtete** statistische Hypothesen über π

Inhaltliche und statistische Hypothesen

- Wir wollen überprüfen, ob die relative Häufigkeit einer Messwertausprägung einer diskreten Variable in einer Population ungleich einem bestimmten Wert π_0 ist.

- Inhaltliche Hypothesen:

$$H_0: h = \pi_0$$

$$H_1: h \neq \pi_0$$

- Wir haben eine einfache Zufallsstichprobe aus der Population mit Stichprobenumfang n vorliegen.

- Dann lauten die statistischen Hypothesen:

$$H_0: \pi = \pi_0$$

$$H_1: \pi \neq \pi_0$$

Teststatistik und p-Wert

- Die Teststatistik ist in diesem Fall genau wie im gerichteten Fall:

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Sie entspricht der absoluten Häufigkeit der interessierenden Messwertausprägung in der Stichprobe und folgt unter der H_0 einer **Binomialverteilung** mit Parametern π_0 und n.
- Da die Binomialverteilung im Allgemeinen nicht symmetrisch ist, ist die Berechnung des **p-Werts** im ungerichteten Fall etwas aufwendig. Wir werden sie daher an dieser Stelle nicht besprechen
- Bemerkung: Der gerade besprochene statistische Hypothesentest wird **Binomialtest für ungerichtete Hypothesen über $\boldsymbol{\pi}$** genannt.

Zusammenfassung

- **p-Werte** können aus der Teststatistik eines Hypothesentests berechnet werden, haben eine **kaum intuitive Interpretation**, können jedoch **statt der kritischen Bereiche zur Testentscheidung genutzt werden**.
- Für unterschiedliche Fragestellungen und Arten der Stichprobenziehung gibt es **Hypothesentests mit unterschiedlichen Teststatistiken**:
  - Ungerichtete/gerichtete Hypothesen über μ
  - Ungerichtete/gerichtete Hypothesen über $\mu_1 - \mu_2$ bei unabhängigen Stichproben
  - Ungerichtete/gerichtete Hypothesen über $\mu_1 - \mu_2$ bei abhängigen Stichproben
  - Ungerichtete/gerichtete Hypothesen über π
- Die **Richtung der Alternativhypothese** gibt an, ob kritischer Bereich und p-Wert **linksseitig**, **rechtsseitig** oder **beidseitig** der Verteilung der Teststatistik unter der spezifischen Nullhypothese $\mu = \mu_0$ bzw. $\pi = \pi_0$ betrachtet werden.